APPLICATION DES FORMULES DE TAYLOR no. 218

I - Rappel des formules

A] 1 Variable réelle

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^n.

On note $R_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n$

- Taylor reste intégral : $f \in C^{n+1}([a,b])$

$$\Longrightarrow R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

- Taylor - Lagrange : $f \in C^{n+1}(]a,b[)$

$$\Longrightarrow \exists c \in]a,b[\text{ tq } R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, de classe C^{n-1} et soit $x_0 \in I$ tq $f^{(n)}(x_0)$ existe

- Taylor - Young : $\forall h \in \mathbb{R}$ tq $x_0+h \in I$:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} h^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

B] Plusieurs variables réelles

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$, où U ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe C^n. Soit $x \in \mathbb{R}^p$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tq $[x, x+h] \subset U$

Notons : $f_k(x) = \left[\sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k]}$

ie : $f_k(x) = \sum_{i_1+\dots+i_p=k} \frac{k!}{i_1!\dots i_p!} h_1^{i_1}\dots h_p^{i_p} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_p^{i_p}}(x)$

- Taylor Reste Intégral : $f \in C^{n+1}(U)$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f_{n+1}(x+th)\,dt$$

- Taylor - Lagrange : Pour $q=1$:

si $f \in C^{n+1}(U)$: $\exists \theta \in]0,1[$ tq

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{k!} + \frac{f_{n+1}(x+\theta h)}{(n+1)!}$$

- Taylor - Young :

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{k!} + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|^n)$$

II - Aspect local

A] Obtenir des limites et des DL

La formule de TY donne un DL à l'ordre n :

exemples : $e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Calcul de limites :

$$\frac{\tan x - x}{\sin x - x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$$

Méthode de Laplace :

si $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable ; $f(a) \neq 0$

$\varphi : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$\varphi'(x) > 0$ sur $]a,b[$

$\varphi'(a) = 0$ mais $\varphi''(a) \neq 0$

et si $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tq $e^{-t_0\varphi}.f$ est intégrable

alors la fonction

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx, \text{ définie } \forall t > t_0$$

admet $\frac{f(a).\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}}$ comme équivalent en $+\infty$

ie : le résultat obtenu si $\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2$

application : formule de Stirling

Théorème Central Limite : Son énoncé

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ suite de v.a.r iid, L^2

alors $\sqrt{\frac{n}{\operatorname{Var} X_1}}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{X_i}{n} - E(X_1)\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$

admet une démonstration basée sur le DL de exp à l'ordre 2 (via Fourier)

B] Obtenir des informations qualitatives sur un voisinage

Extrema relatifs : $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, C^2. $a \in U$

On sait que, si $Df_a = 0$:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{Q(h)}{2} + o(\|h^2\|)$$

où Q est la forme quadratique associée à D^2f_a. Alors :

1) a minimum relatif $\Longrightarrow$ Q positive

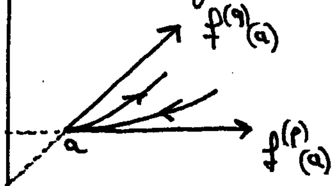
2) Q définie positive $\Longrightarrow$ a minimum relatif

Arcs paramétrés dans $\mathbb{R}^2$

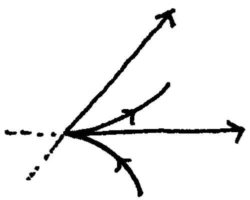
Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞.

Proposition : Si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $\overrightarrow{f^{(n)}(a)} \neq \vec{0}$ alors si p est le plus petit de ces entiers, la courbe de f admet en a une tangente dirigée par $\overrightarrow{f^{(p)}(a)}$.

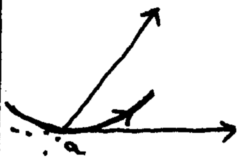
Plus précisément : Si $\exists n > p$ tq $\overrightarrow{f^{(n)}(a)}$ et $\overrightarrow{f^{(p)}(a)}$ sont libres alors si q est le plus petit de ces entiers, la courbe de f admet au voisinage de a l'allure suivante :



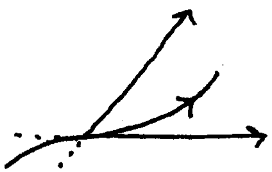
p pair ; q pair
point de rebroussement de 2e espèce



p pair ; q impair
point de rebroussement de 1e espèce.



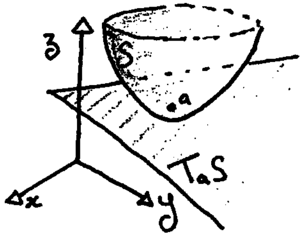
p impair ; q pair
point à allure normale



p impair ; q impair
point d'inflexion

Étude affine locale d'une surface

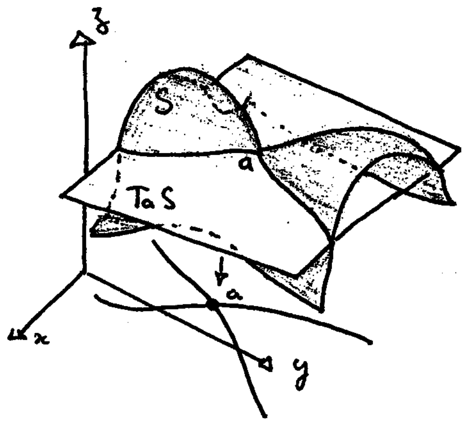
Soit S une surface d'équation $z = f(x,y)$, f C^3 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$.
On suppose D^2f_a non dégénérée, de signature $(i, 2-i)$.



Si $i=2$: S est localement au-dessus du plan tangent en a (strictement, sauf en a)

Si $i=0$: en dessous

Si $i=1$:
S traverse le plan tangent en a : on parle de point selle.



Ce théorème peut être montré avec le lemme de Morse.

III - Aspect global

On se propose dans cette partie d'étudier le reste des formules de Taylor pour obtenir des résultats sur tout un domaine de définition.

A] DSE, holomorphie et régularité C^∞

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, $a \in \mathring{I}$ et $\alpha > 0$ tq $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$

De Taylor-Lagrange, on déduit facilement :

Thm : Si $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[$, $\forall n \geq 0$,
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M . \frac{n!}{\alpha^n}$$ où $M \geq 0$ indépendant de x et n
alors f est DSE sur $]a-\alpha, a+\alpha[$

De même, avec TRI :

Thm : Si $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[$,
$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
alors f est DSE sur $]a-\alpha, a+\alpha[$

Application : Même en définissant exp comme l'inverse du logarithme, on retrouve :

- $e^x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$

Contre-exemples : 1) $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a une série de Taylor en 0 convergeant, mais pas vers f.

2) $f : x \longmapsto \sum_{n\geq 0} e^{-n}\cos(n^2 x)$ admet en 0 une série de Taylor de rayon de convergence nul.

Théorème de Bernstein : Soit $f :]-\alpha,\alpha[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞, vérifiant : $\forall x\in]-\alpha,\alpha[$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x)\geq 0$.

Alors f est DSE sur $]-\alpha,\alpha[$.

Application : DSE de tang.

Sur les fonctions C^∞.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, C^∞, I intervalle. Tout zéro de f d'ordre fini est isolé.

Corollaire : Si I est compact et f a une infinité de zéros, alors l'un d'eux est d'ordre infini.

Thm : Notons $C = \left\{ f\in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \exists \beta,\alpha\geq 0 \text{ tq } \forall n\geq 0,\ \|f^{(n)}\|_\infty \leq \beta n!\alpha^n \right\}$

C'est une algèbre pour le produit point par point.

Alors $\forall f\in C$, $\exists \delta>0$ tq f se prolonge de façon holomorphe et bornée sur $\{|\mathrm{Im}(z)|<\delta\}$.

B] Autres applications

Inégalités de Kolmogorov : $n\geq 2$.

Soit $f\in C^n(\mathbb{R})$. $\forall k\in[\![0,n]\!]$ on pose $M_k = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(t)| \in \overline{\mathbb{R}_+}$

Si $\begin{cases} M_0 < +\infty \\ M_n < +\infty \end{cases}$ alors :

- $\forall p = 1,\dots,n-1$, $M_p<+\infty$
- $\forall m = 1,\dots,n$; $\forall k = 0,\dots,m$ on vérifie

$$M_k \leq 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} M_m^{\frac{k}{m}}$$

Lemme d'Hadamard : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tq $f(0)=0$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\exists g_i : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^∞ tq $\forall x\in\mathbb{R}^n$: $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$

Si de plus $Df_0 = 0$ alors f s'écrit $f = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}$ où les h_{ij} sont C^∞.

Application : Valeur principale de $\frac{1}{x}$ en théorie des distributions :

Soit $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, C^∞ à support compact.

Alors l'intégrale $\int_{\varepsilon\leq |x|\leq \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ converge lorsque $\varepsilon\to 0^+$

Lemme de Morse : Soit $f : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, C^∞.

Si $f(0)=0$; $Df_0 = 0$ et la matrice hessienne de f en 0 est inversible, alors il existe un C^1-difféo $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ défini sur W voisinage de 0 et $r\in\mathbb{N}$ tq : sur W :

$$f = \varphi_1^2 + \dots + \varphi_r^2 - \varphi_{r+1}^2 - \dots - \varphi_n^2$$

Calcul approché d'intégrales :

Des raisonnements similaires aux preuves des formules de Taylor permettent de majorer l'erreur.

Exemple : Méthode de Simpson :

Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$, C^4. Soit $M = \|f^{(4)}\|_\infty$

On considère la subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$; où $x_i = a + i\frac{b-a}{2n}$

Alors :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{n^4}\cdot\frac{M}{2880}.$$

Méthode de Newton : Soit $f : [c,d]\to\mathbb{R}$ de classe C^2 tq $f(c)<0<f(d)$, et $f'>0$.

Soit a l'unique point de $]c,d[$ tq $f(a)=0$.

On regarde la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Une bonne application de Taylor-Lagrange donne facilement accès aux résultats suivants :

i) $\exists C\geq 0$ tq $|F(x)-a|\leq C|x-a|^2$

ii) $\exists \alpha>0$ tq $[a-\alpha,a+\alpha]$ est stable par F

et si $x_0\in]a-\alpha,a+\alpha[$, il y a convergence d'ordre 2 de x_n vers a :

$$x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$$

Enfin, T4 et TRI donnent respectivement l'une et l'autre des implications de ce théorème d'équivalence :

Thm (convexité) : U ouvert de $\mathbb{R}^n$; $f : U\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

$\left(f \text{ fonction convexe sur } U \right) \Longleftrightarrow \left(\forall x\in U,\ D^2 f_x \text{ est une forme quadratique positive} \right)$

Références : Méthode de Laplace) Rouvière p 322 (version plus complète)

Arcs dans $\mathbb{R}^2$: Monier, Géométrie p 169

Surfaces : Rouvière p 315

Thm de Bernstein sur les DSE : Gourdon, Analyse p 247

Inégalités de Kolmogorov : Gourdon, Analyse p 81 (attention, petite erreure dans la matrice)

Zéros isolés des fonctions C^∞ : Rommellet, Analyse, p ?

Semi-analyticité $\left(\|f^{(n)}\|_\infty \leq \beta\, n!\, \alpha^n \right)$: Rudin index: Taylor

Lemme d'Hadamard : Gourdon p 308 (Analyse)

Lemme de Morse : Gourdon, Analyse p 341

Méthode de Simpson : Gourdon p 78 (pour une vraie explication, demander à G. Vial)

Méthode de Newton : Rouvière p 140

Convexité : Rouvière p 304

Th. Central limite : Billingsley ou tout ouvrage sérieux de proba.

Valeur principale : Demander à Laurent Later, Maths 2, tél : 06. . . . . . (0,39 €/min)

Développements possibles : Laplace (mais pas dans cette leçon)
- Bernstein
- Kolmogorov
- Morse (précédé peut-être de Hadamard, qui est très court)
- Newton (mais pas dans cette leçon)

Rajouter Euler - Mc Laurin et Borel

(sommes - finies)