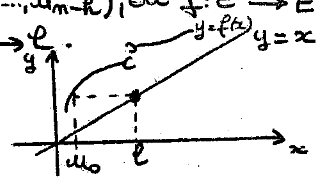
COMPORTEMENT D'UNE SUITE RÉELLE OU VECTORIELLE DÉFINIE PAR $u_{n+1} = f(u_n)$. EXEMPLES.

I Une première étude : points fixes et convergence

1. Définitions [GOU]

* (E,d) espace métrique, $k \in \mathbb{N}^*$. $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre k si on peut écrire : $\forall n \geq k$, $u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-k})$, où $f : E^k \to E$.

* **Prop** : Soit $(u_n)_n$ une telle suite, telle que $u_n \to \ell$. Si f continue en ℓ, alors $f(\ell) = (\ell, \dots, \ell)$.



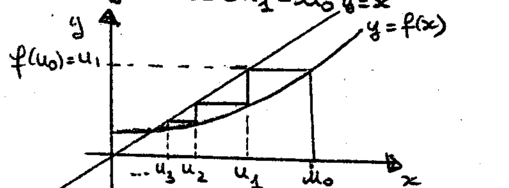
Rq : la réciproque est fausse : Soit u_0 / $f(u_0) = \ell$, alors $\forall n$, $u_n = \ell$.

* Conséquence : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f $\mathcal{C}^0$, I compact. $(u_n)_n$ converge $\iff \lim_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

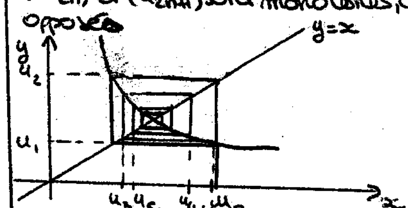
Rq : I compact est important : contre exemple : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

* **Prop** : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ / $f(I) \subset I$, $(u_n)_n$ / $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Si f croissante, $(u_n)_n$ monotone. Son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.



• Si f décroissante, $f \circ f$ croissante. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens opposés.



Rq : Si $(u_n)_n$ est croissante et majorée (ou décroissante et minorée) alors elle converge vers un point fixe de f.

2. Points fixes et convergence [DEN]

On considère la suite $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \end{cases}$ où f est une application, et a / $f(a) = a$.

* Un point fixe a est dit attractif si $\exists V$ voisinage de a / $\forall u_0 \in V$, $(u_n)_n$ est définie pour tout n, et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

* Un point fixe est dit répulsif si $\exists V$ voisinage de a / $f|_V$ inversible, et a est attractif pour $f^{-1}_{|f(V)}$

* **Théorème** : Soit $f : E \to E$, application contractante, avec E métrique complet. Alors f admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, $\forall u_0 \in E$, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.

Rq : On a par récurrence, $d(u_n, a) \leq k^n d(x_0, a)$ (f k-contract.).

Application

Dimension 1 : On se ramène à l'étude de la position de $f'(a)$ par rapport à 1 : On suppose donc f $\mathcal{C}^1$.

• $|f'(a)| < 1$: $\exists h$ / sur $V = [a-h, a+h]$, f est contractante de rapport k sur V. $f(V) \subset V$, et donc $\forall u_0 \in V$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Donc a attractif, et la convergence est exponentiellement rapide.

Si $f'(a) = 0$, un développement de Taylor donne : $|u_n - a| \leq \frac{2}{\Pi}\left(\frac{1}{2}\Pi |x_0 - a|\right)^{2^p}$ où $\Pi = \sup_{x\in V} |f''(x)|$ (Dans le cas où f $\mathcal{C}^2$). La convergence est quadratique et a est dit superattractif.

Exemples : attractif : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$; superattractif : $f(x) = 2x - cx^2$ $(a = \frac{1}{c})$ Calcul de l'inverse

• $|f'(a)| > 1$: f' de signe constant au voisinage de a, et $\exists h$ / $f|_{[a-h, a+h]}$ inversible, et $\forall x \in [a-h, a+h] \setminus \{a\}$, $|f(x) - a| > |x - a|$

f^{-1} est définie sur $f([a-h, a+h]) \ni a$. On peut réécrire : $f(x) = x \iff x = f^{-1}(x)$, et a attractif pour f (car $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)}$).

• $|f'(a)| = 1$: On ne peut rien dire.

- $f(x) = \sin x$. 0 est attractif.
- $f(x) = \operatorname{sh} x$. 0 est répulsif.
- $f(x) = e^x - 1$. Si $u_0 < 0$, 0 attractif. Si $u_0 > 0$, 0 répulsif.

Dimension > 1 ($< \infty$) : On veut faire un parallèle avec l'étude de $f'(a)$

Rappel : Soit u un endomorphisme de rayon spectral $\rho(u) = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$

* **Thm** : u endomorphisme de E, un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Alors :

(i) $\forall N \in \mathcal{N}$, $\rho(u) \leq \|u\|_N$ où $\mathcal{N} = \{$normes sur $E\}$ et $\|u\|_N$: norme subordonnée à N

(ii) $\rho(u) = \inf_{N \in \mathcal{N}} \|u\|_N = \inf_{N \in \mathcal{N}_e} \|u\|_N$ $\quad \mathcal{N}_e = \{$normes euclidiennes sur $E\}$.

(iii) $\forall N \in \mathcal{N}$, $\rho(u) = \lim_{n\to\infty} \|u^n\|_N^{1/n}$.

Soit f $\mathcal{C}^1$

* **lemme** : • Si f k-lipschitzienne sur Ω pour N, alors $\|Df(x)\|_N \leq k$ $\forall x \in \Omega$

• Si Ω convexe, et $\|Df(x)\|_N \leq k$ $\forall x \in \Omega$, alors f est k-lipschitzienne sur Ω pour N.

Application : On a alors le théorème : (f $\mathcal{C}^1$)

* **Thm** : Soit $a \in f$, point fixe de f. Il y a équivalence entre :

(i) $\exists V$ voisinage fermé de a / $f(V) \subset V$, et N norme / $f|_V$ contractante pour N.

(ii) $\rho(Df(a)) < 1$

Le point a est alors attractif. Si $Df(a) = 0$, la convergence est quadratique

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(-x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4} ; -\frac{1}{2}x + y^2 + \frac{3}{4}\right)$

II Conjugaison et changement de variable (ex de suite)

1. Définition. [MAR] [H-W]

Soit $f : E \to E$ et $g : F \to F$; E, F deux $\mathcal{C}$ eo, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ / $\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{array}$ $\forall n$.

$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont conjuguées si $\exists h$, homéomorphisme, tel que $\forall x \in E$, $f(x) = h^{-1} \circ g \circ h(x)$. [Ce qui implique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$, $f^n(x) = h^{-1} g^n h(x)$]

2. Exemple

à regarder de + près

* Suites à récurrence linéaire :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \neq 0$, $(a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^{k-1}$. On considère la suite $\begin{cases} u_{n+k} = a_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + a_0 u_n \\ (u_0, \dots, u_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \end{cases}$. Ce qui revient à l'étude de $\begin{cases} U_{n+1} = AU_n \\ U_0 = {}^t(u_0, \dots, u_{k-1}) \end{cases}$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ a_0 & & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix} = C_P$ où $P(X) = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i = \prod_{j=1}^{s} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$, $(\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j)$.

Alors $\exists P \in GL(\mathbb{C}) \,/\, A = PJP^{-1}$ où J matrice de Jordan.

A est conjugué à J :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k, U_n & \xrightarrow{P^{-1}} & \mathbb{C}^k, P^{-1}U_n = V_n \\ A \downarrow & & \downarrow J \\ \mathbb{C}^k, AU_n & \xrightarrow{P^{-1}} & \mathbb{C}^k, JV_n \end{array}$$

On étudie $\begin{cases} V_{n+1} = JV_n \\ V_0 = P^{-1}U_0 \end{cases}$

On obtient alors : $\exists P_1, \dots, P_s \,/\, \forall i, P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i - 1}[X]$ $(1 \leq i \leq s)$ et tel que $u_n = P_1(n)\lambda_1^n + \dots + P_s(n)\lambda_s^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Exemple</u> : Suite de Fibonacci : $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = u_1 = 1 \end{cases}$.

On trouve $u_n = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \varphi^n - \frac{\mu}{\sqrt{5}} \mu^n$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

* Suites homographiques

On dit qu'une suite $(u_n)_n \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vérifie une récurrence homographique, si elle vérifie une relation de récurrence du type : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$.

On se place sur $P_1(\mathbb{C}) \overset{h}{\simeq} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ où $h : \begin{cases} (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ (x, 0) \mapsto (\infty) & \text{si } y = 0. \end{cases}$

On étudie la suite : $\begin{cases} u_0 \in \overline{\mathbb{C}} \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{au_n + b}{cu_n + d}. \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

Jordan ?

- <u>Si A diagonalisable</u> : $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$, D diagonale $= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ / $A = PDP^{-1}$. Soit $F_A : P_1(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}\binom{x}{y} \mapsto \mathbb{C}A\binom{x}{y}$. Alors F_A a deux points fixes (α, β) correspondants aux droites propres de A par :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{C}^2\setminus\{0\}, P^{-1}\binom{x}{y} = \binom{X}{Y} & \xleftarrow{P^{-1}} & \mathbb{C}^2\setminus\{0\}, \binom{x}{y} & \xrightarrow{\pi} & P_1(\mathbb{C}), \mathbb{C}\binom{x}{y} & \xrightarrow{h} & \overline{\mathbb{C}}, z = \frac{x}{y} & \xrightarrow{h^{-1}} & \overline{\mathbb{C}}, \frac{z-\alpha}{z-\beta} \\ D \downarrow & & \downarrow A & & \downarrow F_A & & \downarrow f & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{C}^2\setminus\{0\}, \binom{\lambda X}{\mu Y} & \xleftarrow{P^{-1}} & \mathbb{C}^2\setminus\{0\}, \binom{ax+by}{cx+dy} & \xrightarrow{\pi} & P_1(\mathbb{C}), \mathbb{C}\binom{ax+by}{cx+dy} & \xrightarrow{h} & \overline{\mathbb{C}}, \frac{az+b}{cz+d} & \xrightarrow{h^{-1}} & \overline{\mathbb{C}}, \frac{\lambda}{\mu}\frac{z-\alpha}{z-\beta} \end{array}$$

Alors $(u_n)_n$ est conjuguée à une suite géométrique.

- <u>Si A n'a qu'un seul vecteur propre</u> :

Alors $\exists P \in GL_2(\mathbb{C}) \,/\, A = PJP^{-1}$, où $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

De même, on peut montrer que F_A a un unique point fixe α.

Alors $h^{-1} : z \mapsto \frac{1}{z - \alpha}$, et $d : z \mapsto z + \frac{1}{\lambda}$.

$(u_n)_n$ est conjuguée à une suite arithmétique.

<u>rq</u> : Si $\alpha = \infty$, $(1, 0)$ est une droite propre, et u est déjà arithmétique

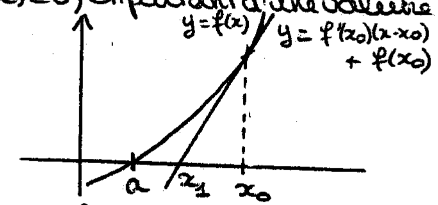
III Méthodes Itératives

1. Résolution de $f(x) = 0$ [DEN]

E est un $\mathbb{R}$-ev.

<u>Dimension 1 : Méthode de Newton</u>

Déterminer numériquement la racine de $f(x) = 0$, en partant d'une valeur "proche" de la solution, x_0.



On approche $y = f(x)$ par la tangente :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Souvent, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ est meilleur.

L'algorithme est donc : $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$ où $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

On a besoin de f dérivable, f' non nulle sur un voisinage de a contenant x_0.

L'algorithme est efficace quand $f \in C^2$: car alors, si $f'(a) \neq 0$, $F \in C^1$ au voisinage de a, $F(a) = a$ et $F'(a) = 0$. Donc a superattractif pour F.

<u>Théorème</u> : Soit f C^2 sur $I = [a - R, a + R]$, $f' \neq 0$ sur I. Soit $\Pi = \frac{1}{2} \frac{\max_{y \in I} |f''(y)|}{\min_{x \in I} |f'(x)|}$, et $h \leq \min(R, \frac{1}{\Pi})$. Alors $\forall x \in [a - h, a + h]$, $|F(x) - a| \leq \Pi |x - a|^2$, et $\forall x_0 \in [a - h, a + h]$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{\Pi} (\Pi (x_0 - a))^{2^n}$.

<u>rq</u> : Dans le cas où f' est trop difficile à calculer, on l'approche par $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ où x_0, x_1 proche de a, $x_0 < a < x_1$ ⤳ méthode de la sécante.

<u>Exemple</u> : $f(x) = x^2 - c$ $(c > 0)$. Alors $F(x) = x - \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$: Calcul d'une racine carré.

<u>Dimension supérieure : Méthode de Newton-Raphson</u>

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, C^2 sur Ω. x_0 proche de A.

On approche f par sa partie linéaire au point x_0 : $Df(x_0)$.

Si $Df(x_0)$ inversible, $\exists! \, x_1 \,/\, x_1 = x_0 - Df(x_0)^{-1} f(x_0)$

On a alors $F : x \mapsto x - Df(x)^{-1} f(x)$.

*Théorème : Si $f \in \mathcal{C}^2$, $f(a)=0$, et $Df(a)$ inversible, alors a est un point fixe superattractif pour F.

Exemple : Résoudre $f\binom{x}{y}=\binom{0}{0}$ où $f_1(x,y)\longmapsto\begin{pmatrix}x^2+xy-2y^2-4\\ xe^x+ye^y\end{pmatrix}$

2. Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires [CiA]

But : Calculer u / $Au=b$.

Si on trouve B, c telsque $(I-B)$ inversibles, et l'unique solution de $u=Bu+c$ est aussi solution de $Au=b$, alors on utilise : u_0 arbitraire $u_{k+1}=Bu_k+c\ \forall k\geq 0$. La méthode est convergente si $u_k\xrightarrow[k\to\infty]{}u\ \forall u_0$.

*Théorème : Il y a équivalence : (i) la méthode itérative est convergente.
(ii) $\rho(B)<1$
(iii) $\|B\|<1$ pour au moins une norme $\|.\|$.

*Méthode de Jacobi

$A=(a_{ij})$ / $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_{ii}\neq 0$. $A=\begin{pmatrix}a_{11} & & -F\\ & \ddots & \\ -E & & a_{nn}\end{pmatrix}=D-E-F=D-(E+F)$.

$Au=b \Leftrightarrow Du=(E+F)u+b \Leftrightarrow u=D^{-1}(E+F)u+D^{-1}b$.

La méthode est donc : $u_{k+1}=D^{-1}(E+F)u_k+D^{-1}b$ où $D^{-1}(E+F)$ = matrice de Jacobi.

En pratique, on calcule, $Du_{k+1}=(E+F)u_k+b$: $\begin{cases}a_{11}u^1_{k+1}=0-a_{12}u^2_k-a_{13}u^3_k-\dots+b_1\\ \vdots\\ a_{ii}u^i_{k+1}=-a_{i1}u^1_k-\dots-0-a_{ii+1}u^{i+1}_k\dots+b_i\end{cases}$

On doit disposer à chaque itération de $2n$ composantes.

Améliorations possibles ?

*Méthode de Gauss-Seidel

On se sert des coefficients déjà calculés : $\begin{cases}a_{11}u^1_{k+1}=0-a_{12}u^1_k-\dots+b_1\\ a_{22}u^2_{k+1}=a_{21}u^1_{k+1}-0-a_{23}u^3_k\dots+b_2\\ a_{ii}u^i_{k+1}=-a_{i1}u^1_{k+1}-a_{i2}u^2_{k+1}\dots-0-a_{ii+1}u^{i+1}_k\dots+b_i\end{cases}$

$Du_{k+1}=Eu_{k+1}+Fu_k+b$

$\Leftrightarrow u_{k+1}=(D-E)^{-1}Fu_k+(D-E)^{-1}b\ \ k\geq 0$

$D-E$ inversible car $a_{ii}\neq 0\ \forall i$. $(D-E)^{-1}F$: matrice de Gauss-Seidel.

On a besoin que de n composantes en mémoire à chaque étape.

III Au choix : Probas ou pas probas... il faut choisir !

IV Quelques suites en probabilité.

1. La ruine du joueur [OUV]

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée.
Il perd 1€ s'il obtient pile, il gagne 1€ de la banque s'il obtient face.
de joueur à $a\in\mathbb{N}^*$€, la banque $b\in\mathbb{N}^*$€.
$(Y_n)_n$ v.a. iid de loi $\mathcal{B}(1/2)$. S_n = fortune du joueur après n lancés.

$\begin{cases}S_0=a\\ S_n=a+\sum_{i=1}^n Y_i=S_{n-1}+Y_n=f(S_{n-1})\end{cases}$ où $f:x\mapsto x+Y$ où $Y\sim\mathcal{B}(1/2)$

Soit $T=\inf\{n\in\mathbb{N}\mid S_n=0$ ou $S_n=a+b\}$ = arrêt du jeu.

Alors : $P(T<\infty)=1$ et $P(S_T=a+b)=\frac{a}{a+b}$.

2. Processus de vie et de mort : Galton-Watson [FOA]

On étudie l'évolution de la taille des générations successives d'une bactérie hermaphrodite.

Z_n : nombre d'individus de la génération n

ξ_i^{n+1} : nombre de descendants de l'individu i de la génération n.

Les $(\xi_i^n)_{i,n}$ sont iid, de loi μ, $\begin{cases}Z_0=a\\ Z_{n+1}=f(Z_n)\end{cases}$ où $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $m\mapsto\sum_{i=1}^m\xi_i$
$(\mu(0)>0)$

Soit G_n la fonction génératrice de Z_n. [où $\xi_i\sim\xi_1^1$]

$\forall n\geq 1$, $\forall s\in[0,1]$, $G_n(s)=\sum P(Z_n=k)s^k=E(s^{Z_n})$.

Alors $m\leq 1\Rightarrow Z_n\xrightarrow{p.s.}0$ et $m>1\Rightarrow P(Z_n=0)\xrightarrow[n\to\infty]{}\underline{\xi<1}$.

IV Orbites Périodiques [H-W] [H-K]

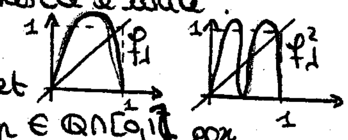
Intéressant lorsque $u_{n+1}=f(u_n)$ ne converge pas par exemple.

* Soit $f:E\to E$, $p\in E$, $n\in\mathbb{N}^*$. p est n-périodique si $f^{\circ n}(p)=p$ et $f^{\circ k}(p)\neq p\ \forall k<n$.
$(p, f(p),\dots,f^{\circ n-1}(p))$ est appelé cycle d'ordre n de f.
Le cycle est attractif (resp. répulsif) si p est attractif (repulsif) pour $f^{\circ n}$.

Rq : Ne dépend pas du choix de p dans le cycle
• Si $f\in\mathcal{C}^1$, cela revient à regarder la position de $Sp(Df[f^{\circ n-1}(p)]\circ\dots\circ Df(p))$ par rap à 1.

Exemples • Homographie $f:z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ a des points périodiques ssi $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ a deux valeurs propres $\lambda\neq\mu$, avec $\frac{\lambda}{\mu}$ racines de l'unité.

• $\lambda\geq 4$. $f_\lambda:x\mapsto\lambda x(1-x)$ a un n-cycle $\forall n\in\mathbb{N}^*$



• $f:x\in[0,1[\mapsto 3x \pmod 1$ a des n-cycles $\forall n\in\mathbb{N}^*$, et $\forall p\in[0,1[$: $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tel que p soit n-périodique $\Leftrightarrow p\in\mathbb{Q}\cap[0,1[$ ppx

Si p est irrationnel alors $(f^{\circ n}(p))_{n\geq 0}$ est dense et équirépartie mod 1.

* Soit l'ordre sur $\mathbb{N}$: $\begin{cases}n=2^\alpha p,\ m=2^\beta q\\ p,q\in 2\mathbb{N}+1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}\end{cases}$, alors $n\triangleleft m \Leftrightarrow \begin{cases}n=m\\ \text{ou}\\ p=q=1 \text{ et } \alpha\triangleleft\beta\\ q=1,\ p>1\\ p,q\neq 1 \text{ et } \alpha<\beta\\ \alpha=\beta \text{ et } 1<p<q\end{cases}$

On a alors : $3\triangleleft 5\triangleleft 7\triangleleft 9\triangleleft\dots\triangleleft 2\times 3\triangleleft 2\times 5\triangleleft\dots\triangleleft 2^n 3\triangleleft\dots\triangleleft 2^{n+1}\triangleleft 2^n\triangleleft\dots\triangleleft 2\triangleleft 1$

Théorème (Sarkovski) : Soit $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ (I segment). Si f a un point n-périodique

Alors $\forall m\ \triangleright n$, f a un point m-périodique.
(Dém. partielle en développement).

$$\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^\alpha = u_n^\alpha \left(1 + \frac{1}{u_n^2}\right)^\alpha = u_n \left(1 + \frac{\alpha}{u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)\right)$$

$\alpha = 2$ le fait disparaître

On peut aussi mentionner :

- Euler Explicite / Implicite
- Méthode du gradient et tout
- Cauchy Lipschitz / Inversion locale (ms faut bien savoir pr koi c une cypl)
- dvp en fraction ctn aussi

Bibliographie :

[DEM] : Demailly Analyse Numérique et équations différentielles
[CIA] : Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle...
[MAR] : Marles Système dynamique "une introduction"
[GOU] : Gourdon Analyse
[AUD] : Audin Géométrie
[ORA] : Oraux X-ENS Analyse 1
[FOA] : Foata-Fuchs Calcul des probabilités
[OUV] : Ouvrard Probabilité 2
[ROU] : Rouvière Petit guide du Calcul Différentielle
[H-W] : Hubbard-West Equations Différentielles et système dynamique.
[H-K] : Hasselblatt-Katok A first course in dynamics

Ranbal...

Développements : - Thm de Sarkowski
- Processus de Galton-Watson

① - Le pt fixe avec l'appl contractante.
Que se passe-t-il si f n'est pas contractante, mais une de ses itérées ? (cf Demailly je crois)

On peut également proposer : - Critères d'attractivité en dim > 1 (Demailly)
- Une étude de suite (au hasard : $\cos(dx)$, ou $\sin(x)$ [ROU], ou $x \mapsto dx(1-x)$ [H-W] ...)
- Méthode de Newton (version de Rouvière).

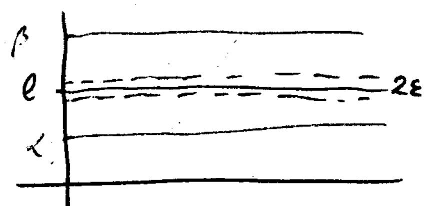
QUESTIONS

① $f : I \subset \mathbb{R} \to I$, I compact, f C^0

Mq $(u_{n+1} - u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow u_n$ cv

Soit $\alpha < \beta$ 2 valeurs d'adhérence (on est sur un ...)
→ on veut mq $\forall \ell \in]\alpha, \beta[$, ℓ est une val. d'adh

$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$



u_n va de α à β en faisant des petits sauts
⇒ se passe forcément par ℓ

⇒ tt le segment est pt fixe de f !
Si $f = id$ → ok u_n cv, ms si $f \neq id$

la démo formelle est lourdingue

$u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} = f(u_n)$

② $\boxed{\text{Pas de cv possible car pas de pt fixe.}}$

2+ si $u_n > 0$ alr $\forall n$, $u_n > 0$! ⇒ $u_n \to \infty$

Eq ? u_n^α
$\alpha > 0$

$u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$

Soit $V_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} 2$

Césaro : $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} V_n \longrightarrow 2$

$\sum_{i=1}^{N} V_n \sim 2N$

$u_{N+1}^2 - u_1^2$! ⇒ $u_N^2 \sim 2N$

⇒ $u_N \sim \sqrt{2N}$

$u_N^\alpha \sim \alpha N \quad u_N \sim \sqrt[\alpha]{\alpha N}$

étudier $u_{n+1} = \sin u_n$ avec $u_0 \in [0,1]$, $u_0 \neq 0$.

③ Sur $[0,1]$, $\sin x < x$

⇒ $u_n \searrow$ • minorée ⇒ cv

le seul pt fixe c'est 0

Eq ? on fait u_n^α avec DL de sin.

$u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha = u_n^\alpha ($

par ex $\alpha = -2$ — ducp on se retrouve avec qqch de sympa

$u_{n+1} = u_n^\alpha - \alpha \frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^2)$

$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1)$ Et on refait Césaro

$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$