COMPORTEMENT D'UNE SUITE REELLE OU VECTORIELLE DEFINIE PAR UNE ITERATION $u_{n+1} = f(u_n)$. EXEMPLES

I) Généralités sur le comportement

A. Dépendance de la fonction f

→ cas où f est monotone

définition : Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$.
Considérons une suite (u_n) vérifiant : $u_0 \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Une telle suite est appelée suite récurrente d'ordre 1.

proposition : 1. Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par signe$(u_1 - u_0)$.
2. Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante. Ainsi les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotone, de sens de monotonie opposés.

exemple : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. La suite est croissante pour $u_0 \in]0;1[$, décroissante pour $u_0 \in]1;+\infty[$

→ cas où f est continue

proposition : Soit $m \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application. Si la suite (u_k) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^m$ et $\forall k \geq 0$, $u_{k+1} = f(u_k)$ converge vers une limite ℓ, et si f est continue en ℓ, alors on a : $f(\ell) = \ell$.

remarque : On aborde ici intuitivement la notion de point fixe, qui est l'objet du paragraphe II) A.

proposition : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to I$ continue. La suite définie par $f(u_n) = u_{n+1}$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

→ cas où f est affine

On s'intéresse ici à des récurrences du type $u_{n+1} = A u_n + b$, avec $u_n, b \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

définition : $d=1$. Les suites définies par $u_{n+1} = k u_n$ (resp. $u_{n+1} = u_n + k$), avec k un réel, sont appelées suites géométriques (resp. suites arithmétiques) de raison k.

définition : Une suite (u_n) vérifie une récurrence linéaire homogène d'ordre h à coefficients constants si il existe $a_0, \dots, a_{h-1} \in \mathbb{R}$ tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+h} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{h-1} u_{n+h-1}$

proposition : L'étude d'une telle suite se ramène à l'étude de la suite (U_n), à valeurs dans $\mathbb{R}^h$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = {}^t(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+h-1})$ et, aussi : $U_{n+1} = A U_n$ avec A la matrice compagnon associée à $P(X) = X^h + a_{h-1} X^{h-1} + \dots + a_0$

exemple : la suite de Fibonacci est définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

→ cas où f est une homographie

définition : On appelle récurrence homographique toute suite récurrente telle que :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$), $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$.

proposition : Soit (u_n) une telle suite à valeurs complexes. On considère l'équation
$f(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0 \quad (E)$
1. Si (E) admet deux racines distinctes α, β, alors on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$, où $k = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}$
2. Si (E) admet une racine double α, alors on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n - \alpha} = \dfrac{1}{u_0 - \alpha} + kn$, où $k = \dfrac{c}{a - \alpha c}$

B. Equivalence à l'infini

proposition : Soit f une fonction continue admettant en 0 le développement asymptotique :
$f(x) = x - a x^\alpha + o(x^\alpha)$, avec $a > 0$ et $\alpha > 1$.
Alors la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, et u_0 assez petit, admet en l'infini l'équivalent : $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$

exemple : Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Alors $u_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$

II) Points remarquables

A. Points fixes et convergence

définition : Soit E un espace et $f : E \to E$. Un point fixe de f est un point x_0 qui vérifie $f(x_0) = x_0$.

Théorème : (BANACH) Soit (E,d) un espace métrique complet. Soit $f : E \to E$ une application k-contractante pour d. Alors f possède un unique point fixe ℓ sur E.

remarque : On peut affaiblir l'hypothèse "f contractante" et la remplacer par : "il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que f^m soit k-contractante".

conséquence : Toute suite, réelle ou vectorielle, (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est k-contractante converge vers le point fixe ℓ de f.

proposition : L'inégalité associée à "f contractante" implique que la convergence de u_n vers le point fixe de f est exponentiellement rapide.

Soit $f : I \to I$ de classe C^1, non nécessairement contractante, possédant des points fixes. On étudie ici le comportement de (u_n) autour de ces points fixes.

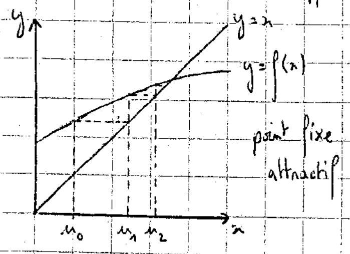
→ cas réel

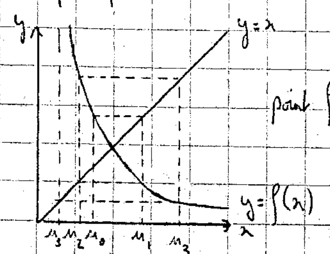
Soit $a \in I$ un point fixe de f.

définition : 1. Si $|f'(a)| < 1$, a est appelé point fixe attractif. En particulier, quand $f'(a) = 0$, a est dit super-attractif.

2. Si $|f'(a)| > 1$, a est appelé point fixe répulsif.

exemples :





Graphiquement, si $f'(a) > 0$ [resp. $f'(a) < 0$], on observe une évolution en escalier [resp. en spirale].

remarques : 1. Si $|f'(a)| = 1$, alors on ne peut pas conclure sur la convergence de u_n vers a. *

2. La vitesse de convergence vers un point super-attractif est extraordinairement rapide. On observe alors un phénomène de convergence quadratique.

* contre-exemple : $f(x) = e^x - 1$. On a $a = 0$ mais : . si $u_0 \leq 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

. si $u_0 > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

→ cas vectoriel

définition : On appelle rayon spectral d'un endomorphisme f la quantité $\rho(f) = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|$, où $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = Sp(f)$.

Théorème : Soit a un point fixe de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1. $\exists V \in \mathcal{V}(a)$; $f(V) \subset V$ et $f|_V$ contractante.
2. $\rho(Df_a) < 1$.

On dit que a est un point attractif.

proposition : En reprenant les mêmes notations, pour $u_0 \in V$, on a : $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.

B. Points périodiques

définition : Un point $a \in I$ est dit k-périodique si $f^k(a) = a$ et, pour tout $m < k$, $f^m(a) \neq a$.

Autrement dit, s'il existe $n_0, k \in \mathbb{N}$ tels que $u_{n_0+k} = u_{n_0}$, alors u_{n_0} est un point k-périodique.

exemple : 1. $f : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z e^{i\frac{\pi}{4}}$. Tout point de S^1 est 8-périodique.

2. Si f est une involution, tout point est 2-périodique.

Théorème : (SARKOWSKI) Soit $f : I \to I \subset \mathbb{R}$ continue avec $f(I) \subset I$. Si f admet un point 3-périodique dans I, alors f y admet un point m-périodique pour tout m.

exemple : Soit $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ distincts 2 à 2. Par interpolation de Lagrange, $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(a_0) = a_1$, $P(a_1) = a_2$, $P(a_2) = a_0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in \mathbb{R}$; $P^n(x) = x$ et $m < n \Rightarrow P^m(x) \neq x$.

remarque : le théorème ne s'applique que pour un intervalle I de $\mathbb{R}$. En dimension supérieure on a :

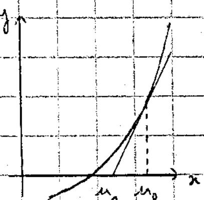
contre-exemple : f la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ n'admet pas de points 2-périodique

III.) Methodes itératives

A. Resolution de $f(x) = 0$

On présente ici la méthode de Newton. Il s'agit d'approcher un zéro d'une fonction de manière itérative. En dimension 1, on utilise la relation de recurrence, pour une fonction f dérivable :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Théorème : Soient $z_1 < \dots < z_n$ des reels et $(m_i)_{1\leq i\leq n}$ des entiers non nuls, avec $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - z_i)^{m_i}$. On a :

1. si on applique la méthode de Newton avec $x_0 > z_n$, alors $x_n \xrightarrow{n\to\infty} z_n$ en décroissant
2. De plus, si $m_n = 1$, alors $\forall c > 0$, $|x_n - z_n| < o(c^n)$
   si $m_n \geq 2$, $\exists c \neq 0$; $|x_n - z_n| \underset{\infty}{\sim} c\left(1 - \frac{1}{m_n}\right)^n$

remarques : 1. la vitesse de convergence est quadratique.
2. Il existe plusieurs cas de non-convergence de la méthode :
   → $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $f'(x_{n_0}) = 0$.
   → Phénomènes de points cycliques.
3. La méthode de Newton peut converger vers une racine "plus lointaine".
4. Pour une fonction non-dérivable, on peut remplacer $f'(x_n)$ par le taux d'accroissement $\tau_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. On parle alors de Methode de la sécante

En dimension supérieure, l'itération se généralise à $x_{n+1} = x_n - (D_{x_n} f)^{-1} (f(x_n))$.

B. Résolution de systèmes linéaires

problème : Etant donné une matrice inversible A et un vecteur b respectivement dans $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, on souhaite calculer la solution u du système linéaire : $Au = b$.

On va s'interesser ici au cas où A se décompose sous la forme $M - N$, où M est une matrice facile à inverser. On se ramène ensuite à l'étude de $M u_{k+1} = N u_k + b$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

→ methode de Jacobi
Ici, on écrit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & -F & \vdots \\ \vdots & -E & D & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} = D - E - F$$

On pose ensuite $\begin{cases} M = D \\ N = E + F \end{cases}$

Les calculs itératifs sont donc $D u_{k+1} = (E+F) u_k + b$, $\forall k \geq 0$, ce qui s'explicite par :

$$\begin{cases} a_{11}[u_1^{k+1}] = \quad - a_{12} u_2^k - a_{13} u_3^k \cdots - a_{1,n-1} u_{n-1}^k - a_{1n} u_n^k \\ a_{22}[u_2^{k+1}] = - a_{21} u_1^k \quad - a_{23} u_3^k \cdots - a_{2,n-1} u_{n-1}^k - a_{2n} u_n^k \\ \vdots \\ a_{n-1\,n-1}[u_{n-1}^{k+1}] = - a_{n-1,1} u_1^k \cdots - a_{n-1,n-2} u_{n-2}^k \quad - a_{n-1,n} u_n^k \\ a_{nn}[u_n^{k+1}] = - a_{n,1} u_1^k - a_{n,2} u_2^k - \cdots - a_{n,n-1} u_{n-1}^k \end{cases} \quad , \text{avec } u_k = (u_i^k)_{i=1..n}$$

→ methode de Gauss-Seidel
de la même décomposition, on ressort $\begin{cases} M = D - E \\ N = F \end{cases}$

En pratique, pour calculer u_i^{k+1}, $i = 2..n$, on va se servir de u_j^{k+1}, $j < i$ au lieu de u_j^k, $j < i$

conséquence : 1. L'espace mémoire requis pour calculer u_{k+1} est diminué par 2 entre les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel.
2. On n'a pas à calculer explicitement de matrice inverse, qui a un coût élevé en mémoire.

Théorème : Notons J (resp. G) la matrice $M^{-1}N$ pour la methode de Jacobi (resp. G.S.)
On a la relation : $\rho(G) = (\rho(J))^2$

Ainsi, les deux méthodes convergent ou divergent simultanément. Lorsqu'elles converge, la methode de Jacobi converge moins rapidement que la méthode de Gauss-Seidel.

éférences : - X. Gourdon "Analyse"

- Francinou - Gianella "Oraux X-Ens"
- Demailly "Équations différentielles et analyse numérique"
- Ciarlet "Introduction à l'analyse matricielle"
- Hubbard - West "Équations différentielles et systèmes dynamiques"

eveloppements : - Théorème de Sarkowski

- Méthode de Newton pour les polynômes

Méthode { du gradient
de la puissance

Exemple de développement

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto x + \alpha \pmod 1$$

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

Périodique ssi α ~~[illegible]~~ rationel

Sinon $\longrightarrow$ dense

Il y a un résultat plus fort

Équirépartition de Weyl

La suite est équirépartie ssi α irrationnel