Leçon n°235 : Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications

• **Motivation** : On peut intervertir une limite et une intégrale en l'absence d'hypothèse de convergence uniforme sur tout compact.

I/ Définitions et théorèmes fondamentaux :

• **Contexte** : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}_+$ ou $\overline{\mathbb{R}_+}$

I.1/ Rappels de théorie de la mesure :

• **Définition 1** : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle tribu borélienne de X la tribu $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$.

• **Théorème 1** : Beppo-Levi

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim\limits_{n\infty} f_n$ est mesurable et :

$$\int_X \lim_{n\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

• **Lemme de Fatou** : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors : $\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$

I.2/ Résultats de théorie de l'intégration :

• **Définition 2** : Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est dite μ-intégrable lorsque : $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

On note, pour $p \in [1, +\infty[$:

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})), \text{ mesurables}, \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

Pour $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, on pose : $\|f\|_p = \int_X |f|^p d\mu$.

• **Application du lemme de Fatou** : Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^1$ telle que : $f_n \xrightarrow[n\infty]{pp} f$ où $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n\infty]{} \|f\|_1$.
Alors : $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• **Théorème 2** : convergence dominé

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant :

(i) μpp $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ où f est une fonction mesurable.

(ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que : $\forall n \geq 1$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ μpp

Alors :

- $(f_n)_{n\geq 0} \in \left(\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)\right)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$
- $\lim\limits_{n\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0$. En particulier : $\lim\limits_{n\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

• **Exemple 1** : $([0;1], \mathcal{B}([0;1]), \lambda)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [0;1]$ $f_n(x) = \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right)$

• **Contre-exemple 1** : $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ f continue positive intégrable, nulle sur ${}^c[0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = \frac{f(x+n)}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

• **Théorème 3** : convergence dominé appliqué aux séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $\sum\limits_{n\geq 1} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$.

Alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable
- $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n|$ est bien définie μpp et intégrable.
- $\int_X \sum\limits_{n\geq 1} f_n(x) \, d\mu = \sum\limits_{n\geq 1} \int_X f_n(x) \, d\mu$

• **Application** : Théorèmes de continuité et de dérivabilité d'intégrales dépendant d'un paramètre.

• **Théorème 4** : Holomorphie.

Soit ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \omega \times X \to \mathbb{C}$ une application vérifiant :

(i) $\forall z \in \omega$ $x \to f(z,x)$ est intégrable

(ii) $\exists N \subset X$, $\mu(N) = 0$, $\forall x \notin N$ $z \to f(z,x)$ est holomorphe sur ω

(iii) $\forall K \subset\subset \omega$ $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ $\forall z \in K$ $\forall x \notin N$ $|f(z,x)| \leq g(x)$

Alors : $z \xrightarrow{F} \int_X f(z,x) \, d\mu$ est holomorphe sur ω et $\forall z \in \omega$ $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x) \, d\mu$

• **Application** : Fonction Γ

I 3/ Propriétés des espaces $\mathbb{L}^p$, $1 \leq p < +\infty$: $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}$

- **Définition 3** : On pose $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) / \{\|\cdot\|_p = 0\}$.
$(\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-ev normé.

> - **Théorème 5** : Riesz - Fisher
> (i) Pour tout $p \in [1;+\infty[$, $(\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet.
> (ii) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.
> On suppose que $f_n \xrightarrow[n\infty]{\|\cdot\|_p} f$. Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) et $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ telles que :
> $\forall k \in \mathbb{N} \quad |f_{n_k}| \leq g \ \mu pp$ et $f_{n_k} \xrightarrow{\mu pp} f$

- **Contre-exemple 2** : $([0;1], \mathcal{B}([0;1]), \lambda)$
$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\} \quad f_{2^n + k} := \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}[}$

> **Théorème 6** : on se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
> L'ensemble $\mathcal{E}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.

- **Application** : Pour $p \in [1;+\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$, $a \to \tau_a f$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$ où $\tau_a f$ désigne la a-translatée de f.

II/ Convolution et séries de Fourier :

- **Contexte** : On se place sur le tore $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qu'on munit de sa topologie quotient et de sa tribu borélienne quotient via la surjection $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$. La mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathbb{T}}$ sur $\mathbb{T}$ est la mesure image par p de la mesure $\frac{\mathbb{1}_{[0;2\pi]}}{2\pi} \cdot \lambda$.

II.1/ Convolution sur le tore :

- **Motivation** : rendre des fonctions "régulières" ou "approcher" une fonction par une suite de fonctions régulières.

- **Définition 4** : Soient $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$. Alors il existe une partie $N \subset \mathbb{T}$ de mesure nulle telle que pour tout $x \notin N$ la fonction $t \to f(t)g(x-t)$ soit intégrable. Ainsi :
$$x \to (f*g)(x) := \int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)\,d\lambda_{\mathbb{T}} \text{ est dans } \mathbb{L}^1(\mathbb{T}).$$
De plus $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

- **Remarque** : $(\mathbb{L}^1(\mathbb{T}), +, \cdot, *)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative mais non unitaire comme nous allons le voir plus loin.

- **Définition 5** : On appelle identité approchée une suite (Φ_n) d'éléments de $\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$ vérifiant :
(i) $\forall n \in \mathbb{N} \ \mu pp \quad \Phi_n(t) \geq 0$
(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{T}} \Phi_n(t)\,d\lambda_{\mathbb{T}} = 1$
(iii) $\forall \varepsilon \in]0;\pi[\ . \ \lim_{n\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \Phi_n \circ p(t)\,dt = 0$

> - **Théorème 7** : Pour tout $p \in [1;+\infty[$, pour tout $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$ et pour toute identité approchée (Φ_n), on a : $\|f * \Phi_n - f\|_p \xrightarrow[n\infty]{} 0$

II 2/ Théorie $\mathbb{L}^p$ des séries de Fourier : $1 \leq p < +\infty$.

- **Motivation historique** : outil mathématique pour résoudre l'équation de la chaleur.
- **Contexte** : Pour $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose :
$e_n : t \to \exp(int)$, $c_n(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{e_n(t)}\,dt$, $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k$ $\quad N \in \mathbb{N}$.

- **Proposition 1** :
(i) Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{T}$: $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f') = in\, c_n(f)$
(ii) Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f * e_n = c_n(f) \cdot e_n$
(iii) Si $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f*g) = c_n(f) \cdot c_n(g)$

Lemme de Riemann-Lebesgue :
Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) \xrightarrow[|n| \to \infty]{} 0$

Application : $*$ ne possède pas d'élément neutre dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$.

Définition 6 :
- Noyau de Dirichlet : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k$
- Noyau de Fejer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad F_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k$

Proposition 2 : Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$. Alors :
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n(f) = f * D_n$
(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$
alors $\sigma_n(f) = f * F_n$.

Théorème 8 : Fejer
Soit $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$, alors $\| \sigma_n(f) - f \|_p \xrightarrow[n \infty]{} 0$

Application :
- Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathbb{L}^p$.
En particulier $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.

II. 3/ Théorie $\mathbb{L}^2$ des séries de Fourier :

- **Contexte :** $(\mathbb{L}^2(\mathbb{T}), \langle . / . \rangle)$ est un espace de Hilbert.
Pour $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ $\quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(t) \cdot \overline{g(t)} \, d\lambda_{\mathbb{T}}$.

Théorème 9 :
$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ $\quad f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$

Proposition 3 : Egalité de Parseval.
$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ $\quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

III/ Théorèmes limites en probabilités :

- **Contexte :** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé

Théorème 10 :
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et $\mathbb{L}^2$. On suppose que
$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_n] < +\infty$.
Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} X_k \right)$ converge presque sûrement.

- **Application :** démonstration de la loi forte des grands nombres dans le cas $\mathbb{L}^2$.

Théorème 11 : LFGN
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires intégrables et i.i.d. Alors :
$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$$

- **Application :** méthode de Monte-Carlo.

- **Références :**
  - Théorie de l'intégration Briane - Pagès
  - Analyse pour l'agrégation Queffélec - Zuily
  - Objectif Agrégation Beck - Malick - Peyré

- **Développements :**
  - Etude de la fonction Γ
  - Démonstration du théorème 10