Suites et séries de fonctions.
Exemples et contre-exemples

241

2007/08

I - Modes de convergence

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions de X ensemble dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On rappelle les liens entre les différents modes de convergence

Prop (i) (f_n) converge uniformément $\Rightarrow (f_n)$ converge simplement

(ii) (f_n) uniformément de Cauchy $\Leftrightarrow (f_n)$ converge uniformément

(iii) $\sum f_n$ converge normalement $\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} f_n\right)_N$ converge uniformément

Rem : les implications (i) et (iii) sont strictes :
avec $X = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ converge simplement mais non uniformément

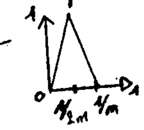
$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément mais pas normalement.

II - Continuité de la limite

L'exemple de $f_n(x) = x^n$ montre que la convergence simple ne préserve pas la continuité.

X est maintenant un espace topologique

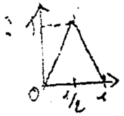
Thm : Soit (f_n) suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f alors : f est continue

Cette condition n'est que suffisante :
avec $X = \mathbb{R}_+^*$ $f_n(x) = e^{-nx}$
avec $X = \mathbb{R}$ $f_n(x) = u(x-n)$ avec u continue à support compact
avec $X = [0,1]$ f_n de graphe 

On a cependant une réciproque partielle :

Thm (Dini) : Soit (f_n) suite croissante de fonctions continues de X compact dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue. Alors (f_n) converge uniformément

Application : la suite de polynômes sur $[0,1]$ définie par : $f_0 = 0$ $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n^2$ converge uniformément vers $f(x) = \sqrt{x}$

Ex : Si u est la fonction définie sur $[0,1]$ par :  et prolongée à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$ converge vers une fonction continue nulle part dérivable Van der Waerden.

III - Dérivation, Intégration

(1) Dérivabilité

La suite de fonctions C^∞ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

Thm soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n) : I \to \mathbb{R}$ dérivables
avec : $\begin{cases} (f_n) \text{ converge simplement vers } f \\ (f_n') \text{ — uniformément vers } g \end{cases}$
alors f est dérivable et $f' = g$

Application : la fonction $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

(2) Intégrale de Riemann

Thm soit $f_n \; I \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable, avec I compact, convergeant uniformément vers f.
Alors f est Riemann-intégrable et :
$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx$$

L'hypothèse de compacité est nécessaire : prendre : $f_n(x) = \frac{1}{n} 1\!\!1_{[n,2n]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Application : soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\exists c > 0$ $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3$ $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x-y|$
alors la suite $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s))\,ds$ converge uniformément sur tout compact vers la solution du problème de Cauchy :
$x' = f(t,x)$, $x(0) = x_0$

(3) Intégrale de Lebesgue
$(X, \mathcal{T}, \mu)$ est maintenant un espace mesuré

Thm soit (f_n) suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers f et telle qu'il existe g intégrable tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq g(x)$
alors f est intégrable et : $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$

Ex : calcul de : $\int_{]0,1[} \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$

Thm soit (f_n) suite croissante de fonctions mesurable positives, alors :
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x)$$

Application : Calcul de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{k\geq 1} \int_0^1 x^{2k} - x^{2k+1}\,dx$

Malgré leur généralité ces théorèmes ne couvrent pas tous les cas où $\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\,d\mu$, considérer : $f_n(x) = \frac{1}{n} 1\!\!1_{[n,n+1]}(x)$

IV - Séries entières, holomorphie

(1) Séries entières
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ série entière et $R^{-1} = \limsup |a_n|^{1/n}$

Thm $\forall \rho < R$, la série converge normalement vers une fonction f C^∞ sur $D(0,\rho)$.
De plus la série dérivée $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge normalement vers f' sur $D(0,\rho)$

Ex : $\exp$ est C^∞ sur $\mathbb{C}$

Remarque : si f est somme d'une série entière, elle est somme de sa série de Taylor.

Thm (Borel) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombres complexes, il existe une fonction f C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout n.

Remarque ceci montre qu'une fonction C^∞ peut avoir une série de Taylor divergente

(2) Holomorphie

Thm Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, (f_n) suite de fonctions holomorphe $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ convergeant uniformément sur tout compact vers f

- f est holomorphe
- (f'_n) converge uniformément sur tout compact vers f'

Exemple la fonction $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ est analytique sur le demi plan $\{Re(s) > 1\}$

(3) Produits infinis

Prop: un produit infini $\prod_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur K compact si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} (f_n - 1)$ converge normalement sur K.

Thm: un produit infini normalement convergeant sur tout compact de fonctions holomorphes est holomorphe. De plus l'ensemble les zéros de $\prod_{n\geq 1} f_n$ est la réunion de l'ensemble des zéros des f_n.

Exemples: $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ n'a pas de zéros sur $\{Ré(s) > 1\}$

V - Approximation

Thm (Weierstraß) Soit $f \in C^0([0,1])$, la suite de polynômes $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$ converge uniformément vers f.

poly de Bernstein

Thm (Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et C^1 par morceaux alors la série de fourier $S_N(f)(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k(f) e^{ikx}$ converge normalement vers f.

Application: Calcul de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ en développant $f(x) = \frac{1-x^2}{\pi^2}$ en série de fourier et en évaluant.

Thm (Féjer)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique et C^0. Alors la série de fourier de f converge uniformément en moyenne de Césaro vers f. (ie : $u_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n(f)$ converge uniformément vers f)

RÉFÉRENCES : Gourdon

Rudin

G. et Rey

Grand X-ENS