Sous variétés de $\mathbb{R}^m$. Exemples

I Définitions, propriétés

1) Ensemble lisse en un point

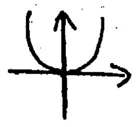
Déf : Soit $V \subset \mathbb{R}^m$, $a \in V$, $d \in \mathbb{N}$.

V est lisse en a, de dimension d s'il existe un difféo F de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^m$ sur le voisinage ouvert $F(U)$ de 0 dans $\mathbb{R}^m$ tel que

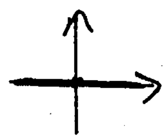
$$F(V \cap U) = V' \cap F(U) \quad \text{où} \quad V' = \mathbb{R}^d \times \{0\}$$

- V est une sous variété de dim d de $\mathbb{R}^m$ s'il est lisse en chacun de ses pts.

Ex : - la parabole d'équation $y = x^2$ est une sous variété de dim 1 de $\mathbb{R}^2$ via



$F(x,y) = (x, y - x^2)$ $\Longrightarrow$



$\mathbb{R} \times \{0\}$

2) Déf implicite.

Ppt : V est lisse en a, de dim d

$\Leftrightarrow$ $\exists$ voisinage U de a ds $\mathbb{R}^m$ et $(m-d)$ fct° $f_i : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

tq $(x \in V \cap U) \Leftrightarrow x \in U$ et $f_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \dots, f_{m-d}(x_1, \dots, x_m) = 0$

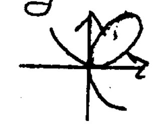
et les $Df_i(a)$ sont indépendantes.

Ex : - l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de dim 1 dans $\mathbb{R}^2$

- $SL_m(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),\ \det M - 1 = 0\}$ dim $m^2 - 1$ ds $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

- $O_m(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),\ {}^tMM - I = 0\}$ dim $\frac{m(m-1)}{2}$ ds $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$

Cex : Folium de Descartes $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$



3) Graphe.

Ppt : V est lisse en a, de dim d

$\Leftrightarrow$ $\exists$ voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^m$

$\exists$ ———— U' de $(a_1, \dots, a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$

$\exists (m-d)$ fct° $g_i : U' \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq

$$x \in (V \cap U) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in U' \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \dots, x_d), \dots, x_m = g_{m-d}(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

Ex : - paraboloïde elliptique $= \{(x, y, \frac{1}{2p}(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

- paraboloïde hyperbolique $= \{(x, y, \frac{1}{2p}(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Cex : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = |x|\}$.

4) Déf paramétrique.

Ppt : V est lisse en a, de dim d

$\Leftrightarrow$ $\exists$ voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et m fct° $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq

$$f : u = (u_1, \dots, u_d) \mapsto x = (f_1(u), \dots, f_m(u))$$

soit un homéo de Ω sur $V \cap U$ avec $a = f(0)$ et que $Df(0)$ soit injective.

Ex : - ellipsoïde : $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta \\ y = b\cos\varphi\sin\theta \\ z = c\sin\varphi \end{cases}$

- paramétrisat° rationnelle du cercle trigo.

$t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$

II Espaces tangents

1) Def.

Def : Soit $V \subset \mathbb{R}^m$, $a \in V$.
Un vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ est tangent à V en a s'il existe
$\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ C^1 où $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$ tq
$\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$.

Thm : Si V est lisse en a, de dim d, ses vecteurs tangents en a forment un sev de dim d, appelé espace vectoriel tangent à V en a.

Def équivalentes : Avec les notat° de I, l'espace vectoriel tangent en a à V est : i) implicite : le noyau de $Df(a)$
ii) graphe : le graphe de $Dg(a_1, \dots, a_d)$
iii) paramétrique : l'image de $Dl(0)$.

Ex : $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 - y^3 + x = a\}$ admet au pt (x_0, y_0) une droite tgte dirigée par $\left(\frac{3y_0^2}{3x_0^2+1}, 1\right)$

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, son graphe admet au pt $(x, f(x))$ une droite tgte dirigée par $(1, f'(x))$.
- $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ admet au pt (x_0, y_0, z_0) un plan tgt d'équation $xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0$.

Rq. On peut définir la notion d'espace tangent affine.

2) Lemme de Morse.

Pp° : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant 0, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fct° de classe C^1 sur U.
On suppose $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ non dégénérée, de signature $(p, m-p)$.
Alors $\exists\, l$ entre deux voisinages de 0 ds $\mathbb{R}^m$ tq
$l(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_m^2$
où $u = l(x)$.

App : Position d'une nappe paramétrée par rapport à son plan tgt.

Pp° : Σ nappe paramétrée $z = f(x,y)$ où f est C^3
(x_0, y_0) pt critique non dégénéré de f.
Π le plan tgt à Σ au pt (x_0, y_0)
- Si $f''(a)$ est de signature $(2,0)$, Σ est au-dessus de Π au voisinage de a
- ______ $(0,2)$, ______
au dessous ______
- Si $f''(a)$ est de signature $(1,1)$, Σ traverse Π selon 2 courbes qui se coupent en a.

Ex : - paraboloïde de révolution $\mathcal{P} : x^2 + y^2 - 2pz = 0$

en 0, $\mathcal{P}$ est au dessus de son plan tgt car $f''(0) = \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}$

3) Extrema liés.

Thm : Soit $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et soit $X = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$, et si les formes linéaires $Dg_1(a), \dots, Dg_p(a)$ sont indépendantes, alors les formes linéaires $Df(a), Dg_1(a), \dots, Dg_p(a)$ sont liées.

i.e $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq $Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a)$

Application : - distance d'un point B à une sphère $S : x^2+y^2+z^2 = 1$

$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2-1 = 0\}$.

$f(x,y,z) = (x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 + (z-z_B)^2$

→ le min est atteint en $S \cap (OB)$.

III Cas particuliers des dim 1 et 2.

1) Courbes.

Déf : on appelle courbe plane une sous-variété de dim 1 de $\mathbb{R}^2$.

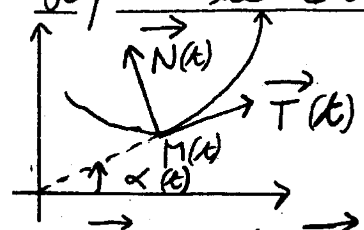
Déf : Abscisse curviligne :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\| dt'$$

Longueur d'une courbe :

$$L(t_0, t_1) = s(t_1) - s(t_0)$$

Repère de Frénet :

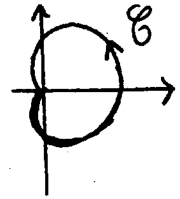


$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

Rayon de courbure :

$$R = \frac{ds}{d\alpha}$$

Exemple : La cardioïde : $\rho = 1 + \cos(\theta)$



$$\ell(\mathcal{C}) = 8$$

2) Surfaces

Déf. : On appelle surface une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

Première forme fondamentale : Si $M \in \mathcal{S}$ une surface, la première forme fondamentale est la restriction du produit scalaire au plan tangent en M.

Si $I_M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $\mathcal{S} = \varphi(A)$,

$$\text{aire}(\mathcal{S}) = \int_A \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy$$

avec, si $\mathcal{S}$ est paramétrée par φ avec $\varphi(0,0) = M$.

$E = \|\partial_x \varphi(0,0)\|^2$. $F = (\partial_x \varphi(0,0), \partial_y \varphi(0,0))$ $G = \|\partial_y \varphi(0,0)\|^2$

Développements :

- Lemme de Morse
- Théorème des extrema liés, application.

Références :

Rouvière, Petit guide du calcul différentiel.
Objectif agrégation.
Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles
Gonnord, Tosel, Calcul différentiel