Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

On considère les fonctions f 2π-périodiques de $\mathcal{L}^1([0,2\pi])$ i.e. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt < +\infty$.
Faire ressortir le cas cts d'abord.

I Généralités.

1. Définitions. [D] [Z.Q]

Déf. 1 - $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n(x) = e^{inx}$

- On appelle polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ ($N \in \mathbb{N}$) une fonction de la forme : $x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x)$ ($c_n \in \mathbb{C}$) que l'on peut écrire également :

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ avec } \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Déf 2. On appelle série trigonométrique une série de la forme : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x)$

Exemples: [D] $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{inx}}{n!}$: séries trigonométriques normalement convergentes sur $\mathbb{R}$.

Déf 3. - Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,2\pi])$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Alors $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- La somme partielle de Fourier de f est le polynôme trigonométrique :
$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \quad (N \in \mathbb{N}).$$

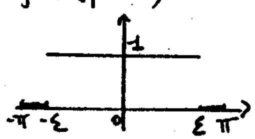
- On appelle alors développement en série de Fourier de f :
$$S(f) = \lim_{N\to\infty} S_N(f) \quad (\text{si la limite existe}).$$

Exemple : Les polynômes trigonométriques sont égaux à leur développement en série de Fourier.

Remarque: Si f est paire alors $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$; si f est impaire $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple: [HVT] Coefficient de Fourier de la fonction indicatrice (fonction signal). Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$ et $\Delta_\varepsilon(t) = \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t)$ la fonction signal (paire)

$$c_n(\Delta_\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n\pi} & \text{si } n \neq 0 \\ \frac{\varepsilon}{\pi} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$



$$S_N(\Delta_\varepsilon)(t) = \frac{\varepsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n\pi}\cos(nt)$$

2. Propriétés [Z.Q]

Prop 1 : Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,2\pi])$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$:
- i) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où $\check{f}(t) = f(-t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
- ii) $c_n(e_k f) = c_{k-n}(f)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
- iii) $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$
- iv) Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $c_n(f') = in\,c_n(f)$

Prop 2 : Soit $f \in \mathcal{L}^p([0,2\pi])$, $1 \leq p < +\infty$. On pose $\tau_a f(t) = f(t+a)$.
Alors l'application $\phi_f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}^p([0,2\pi]) \\ a \longmapsto \tau_a(f) \end{cases}$ est uniformément continue.

Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{L}^1([0,2\pi])$

Alors $\lim_{|\lambda_n|\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{i\lambda_n t}\,dt = 0$.

En particulier, on a : $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.

Déf 4: Soient f et g dans $\mathcal{L}^1([0,2\pi])$, on définit le produit de convolution de f et g par:
$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prop 3. Soient f et $g \in \mathcal{L}^1([0,2\pi])$ alors on a : $f * e_n = c_n(f)e_n$
et $c_n(f*g) = c_n(f)\,c_n(g)$

Prop 4. [K] L'application $\mathcal{F} : \begin{cases} \mathcal{L}^1([0,2\pi]) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$ est un homomorphisme d'algèbre de $(\mathcal{L}^1([0,2\pi]), +, *, \|\cdot\|_1)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), +, \times, \|\cdot\|_\infty)$ qui est continu et de norme 1.

3. Deux Noyaux importants [Z.Q].

c'est le noyau de Dirichlet le ⊕ impt mais il a pas les bonnes propriétés. (par rapport à Fejér)

Déf 5. Noyau de Dirichlet : $\forall N \in \mathbb{N}$, on définit $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$.

Prop 5 :
- i) $D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et ainsi D_N est pair.
- ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x)\,dx = 1$
- iii) $\forall f \in \mathcal{L}^1([0,2\pi])$ $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = f * D_N$.

Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

On considère les fonctions f 2π-périodiques de $L^1([0,2\pi])$ i.e. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt < +\infty$.
Faire ressortir le cas cts d'abord.

I Généralités.

1. Définitions. [D][Z-Q]

Def 1 - $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n(x) = e^{inx}$

- On appelle polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ $(N \in \mathbb{N})$ une fonction de la forme : $x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x)$ $(c_n \in \mathbb{C})$ que l'on peut écrire également :

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ avec } \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Def 2. On appelle série trigonométrique une série de la forme : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x)$

Exemples [D]: $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{inx}}{n!}$: séries trigonométriques normalement convergentes sur $\mathbb{R}$.

Def 3. - Soit $f \in L^1([0,2\pi])$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Alors $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- La somme partielle de Fourier de f est le polynôme trigonométrique :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \quad (N \in \mathbb{N}).$$

- On appelle alors développement en série de Fourier de f :

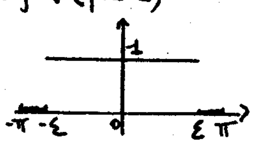
$$S(f) = \lim_{N\to\infty} S_N(f) \quad (\text{si la limite existe}).$$

Exemple : Les polynômes trigonométriques sont égaux à leur développement en série de Fourier.

Remarque : Si f est paire alors $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$; si f est impaire $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple [HVT]: Coefficient de Fourier de la fonction indicatrice (fonction signal).
Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$ et $\mathbb{1}_\varepsilon(t) = \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t)$ la fonction signal (paire)

$$c_n(\mathbb{1}_\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n\pi} & \text{si } n \neq 0 \\ \frac{\varepsilon}{\pi} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$



$$S_N(\mathbb{1}_\varepsilon)(t) = \frac{\varepsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n\pi}\cos(nt)$$

2. Propriétés [Z-Q]

Prop 1 : Soit $f \in L^1([0,2\pi])$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$:

i) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où $\check{f}(t) = f(-t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

ii) $c_n(e_k f) = c_{k-n}(f)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

iii) $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$

iv) Si f est continue et C^1 par morceaux $c_n(f') = in\,c_n(f)$

Prop 2 : Soit $f \in L^p([0,2\pi])$, $1 \leq p < +\infty$. On pose $\tau_a f(t) = f(t+a)$.
Alors l'application $\phi_f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow L^p([0,2\pi]) \\ a \longmapsto \tau_a(f) \end{cases}$ est uniformément continue.

Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^1([0,2\pi])$

Alors $\lim_{|\lambda_n|\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{i\lambda_n t}\,dt = 0$.

En particulier, on a : $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.

Def 4 : Soient f et g dans $L^1([0,2\pi])$, on définit le produit de convolution de f et g par :

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prop 3. Soient f et $g \in L^1([0,2\pi])$ alors on a : $f * e_n = c_n(f)e_n$
et $c_n(f*g) = c_n(f)\,c_n(g)$

Prop 4. [K] L'application $\mathcal{F} : \begin{cases} L^1([0,2\pi]) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$ est un homomorphisme d'algèbre de $(L^1([0,2\pi]), +, *, \|\cdot\|_1)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), +, \times, \|\cdot\|_\infty)$ qui est continu et de norme 1.

3. Deux Noyaux importants [Z-Q].

c'est le noyau de Dirichlet le $\oplus$ impt mais il a pas les bonnes ptés. (par rapport à Fejér)

Def 5. Noyau de Dirichlet : $\forall N \in \mathbb{N}$, on définit $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$.

Prop 5 : i) $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ et ainsi D_N est pair.

ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x)\,dx = 1$

iii) $\forall f \in L^1([0,2\pi])$ $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = f * D_N$.

Exemple : Retour à la fonction signal :

On applique le théorème de Dirichlet à s_ε au point $x_0 = \varepsilon$.

On a $s_\varepsilon^+ = 0$ et $s_\varepsilon^- = 1$. Donc $S_N(s_\varepsilon)(\varepsilon) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

i.e. $\frac{\varepsilon}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varepsilon)\cos(n\varepsilon)}{n\pi} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\varepsilon)}{n\pi} = \frac{1}{2}$.

On en déduit en particulier (en posant $2\varepsilon = a$) : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$ pour $a \in]0, 2\pi[$.

III Applications

1. Calcul de sommes de séries. [MVT]

a) Dent de scie. On pose $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in]-\pi,\pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$, f 2π-pér.

On montre que : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

b) Dent de scie continue : On pose $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi,\pi]$, f 2π périodique.

On montre que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

c) Parabole par morceaux : On pose $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0,\pi]$, f impaire, 2π-per.

On montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

2. Inégalité isopérimétrique [Z-Q]

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe simple, fermée et régulière de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Soit L sa longueur et S l'aire qu'elle enserre.

On a : $L^2 \geq 4\pi S$

En particulier $L^2 = 4\pi S \iff \gamma$ définit un cercle.

3. Equation de la chaleur (motivation historique). [Z-Q]

On cherche $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$ où $Q =]0,1[\times]0,+\infty[$

tel que $\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \text{ dans } Q \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = h(x) \quad \forall x \in [0,L[. \end{cases}$

L'unique solution à ce problème est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \quad \text{où } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

4. Formule de Poisson $\boxed{\text{DVPT}}$ [Z.Q] [G.]

Def : Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,dx$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Si • $\exists M > 0$ et $\alpha > 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| < \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

• $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\hat{f}(n)| < \infty$

alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)$

Application : La fonction θ de Jacobi, définie pour $t > 0$ par $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$

vérifie $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Références : [D] : Analyse cours et exercices CAPES. Dufetel et Lacroix-Sonrier.
[G] : Analyse. Gourdon
[K] : An Introduction to harmonic Analysis. Katznelson.
[MVT] : Suites et séries de fonctions. Moisan-Vernotte-Tosel.
[S] : Fourier Analysis. Stein-Shakarchi.
[Z.Q] : Eléments d'analyse pour l'Agrégation. Zuily-Queffélec.

Possibilités d'ajouts dans le plan ou de développements :

→ Phénomène de Gibbs. cf [IVT] ou Gramm X-ens Analyse 2 (p. 318) ou Gb, cf Agrégation.
→ Série génératrice des nombres de Bernoulli : Gramm X ens Analyse 2 (p 297).
→ Inégalité de Bernstein [ZQ] p 100 :
Soit $\lambda > 0$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincts et tels que $\max_j |\lambda_j| \leq \lambda$.
Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $R(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t}$ $(t \in \mathbb{R})$ alors $\sup_{t\in\mathbb{R}} |R'(t)| \leq \lambda \sup_{t\in\mathbb{R}} |R(t)|$
→ fonctions continues partout sans dérivée [Z-Q] p 207
→ Théorème d'équidistribution de Weyl. Fourier Analysis Körner.

• Si la série $\sum c_n(f)$ est abs cv (f ctn)
$\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(x) = \sum c_n(f) e^{inx}$? $(\forall x)$.
Soit $g(x) = \sum c_n(f) e^{inx}$.
par cv abs de $\sum c_n(f)$, on a cvn de $\sum c_n(f) e^{inx}$
Et dc g est ctn.
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = c_n(f)$ (encore grâce à la cvn, car ducp on peut intervertir)
Et ducp : $\|f - g\| \leq \underbrace{\|f - \sigma_N(f)\|}_{\to 0} + \underbrace{\|\sigma_N(f) - \sigma_N(g)\|}_{= 0} + \underbrace{\|\sigma_N(g) - g\|}_{\to 0}$

$= 0$.
dc $f = g$.

• f C^1 ⇒ $c_n(f)$ est en $o\left(\frac{1}{n}\right)$
• f : $|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ (f pas C^1).
mq $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$
Soit $g(x) = f(x+h) - f(x)$
$c_n(g) = \dots \frac{1}{2\pi} \int_h^{2\pi+h} f(y) e^{-in(y-h)} dy - c_n(f)$
Si $h = \frac{\pi}{n}$
$-\frac{1}{2\pi} \dots = -2 c_n(f)$ ⇒ $|c_n(g)| = 2 |c_n(f)|$
or $|c_n(g)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha dx$ ⇒ $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

• f C^1, mq $\sum |c_n(f)| < \infty$.
déjà $c_n(f') = in\, c_n(f)$
$\sum |c_n(f)| = \sum \left|\frac{c_n(f')}{n}\right| \overset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum |c_n(f')|^2\right)^{1/2}$.