+ Shannon à la fin. sommes de Gauss + Fresnel Wiener

246 Développement d'une fonction ~~périodique~~ en séries de Fourier. Exemples et applications

On travaille sur le tore $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Il y a correspondance entre les fonctions sur $\mathbb{T}$ et les fonctions sur $\mathbb{R}$ 2π-~~périodiques~~.
λ désigne la mesure de Lebesgue normalisée.

I GÉNÉRALITÉS

1) Définitions

Def : $e_n : t\in\mathbb{T} \to e^{int} \in \mathbb{C}$
un élément de $\mathrm{Vect}\{e_n, n\in\mathbb{Z}\}$ est appelé polynôme trigonométrique

Def : soit $f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, on définit
- ses coefficients de Fourier ...... $c_n(f)=\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}d\lambda(t)$
- sa série de Fourier .... $\sum (c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n})$
- les sommes partielles .... $S_n(f)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$
- leur moyennes de Cesaro ...... $\sigma_N(f)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$

Rq : Il existe une représentation équivalente en sinus, cosinus

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n>0}(a_n\cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{où} \begin{cases} a_n = 2\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos nt \, d\lambda(t) \\ b_n = 2\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin nt \, d\lambda(t)\end{cases}$$

Exemple : Si f est un polynôme trigonométrique, de degré d, alors $S_n(f)=f$ pour $n\geq d$
$\Rightarrow f$ est la limite uniforme de sa série de Fourier

Def : $\gamma : \mathbb{L}^1(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$
$f \longrightarrow (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$

γ est un morphisme d'espaces vectoriels
Problème : peut-on toujours reconstruire f par sa série de Fourier ? En quel sens ?

2) Premières propriétés

Weyl P

Prop : Continuité de la translation
soit $f\in\mathbb{L}^p(\mathbb{T})$. On définit $\tau_a f(t)=f(t+a)$. Alors pour $p<\infty$,
$$\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

Prop : • Lemme de Riemann-Lebesgue
$$\gamma(\mathbb{L}^1)\subset c_0 = \{\text{suites } u_n \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0\}$$
• $\forall f,g\in\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, $\gamma(f*g)=\gamma(f)\gamma(g)$
où $f*g : x \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(y)g(x-y)d\lambda(y)$

Le théorème de Banach-Steinhaus permet de montrer l'existence de f continue tq $S_n(f)(0) \not\longrightarrow f(0)$.

On cite ici un exemple historique :

Contre-exemple de Dubois-Reymond
soient (n_k) des entiers tq $n_{k+1} > 3n_k$
(α_k) des réels >0, tq $\sum_{\mathbb{N}} \alpha_k < +\infty$ et $\alpha_k \log(n_k) \longrightarrow +\infty$

on pose $P_k(x)=e^{2in_kx}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{\sin(jx)}{j}$ et $f=\sum_{k\geq 1}\alpha_k P_k$

Alors : f est continue et $|S_n(f)(0)| \longrightarrow +\infty$

II SÉRIES DE FOURIER DE FONCTIONS DE $\mathbb{L}^p(\mathbb{T})$

1) Théorème de Fejer

Def : Noyau de Dirichlet : pour $N\in\mathbb{N}$, $D_N=\sum_{-N}^{N} e_n$
Noyau de Fejer : pour $N\geq 1$, $K_N=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n$

Rq : pour $f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, $f*e_n = c_n(f)e_n$
Ces noyaux permettent donc d'écrire :
$S_n(f) = D_n * f$ $\quad\sigma_N(f)=K_N * f$

__Remarque__

on peut expliciter directement K_N et D_N :

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \qquad K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

__Déf__: Suite régularisante

C'est une suite (ρ_n) de $\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$ qui vérifie :

- (ρ_n) est bornée dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{T}} \rho_n = 1$
- $\forall \delta > 0$, $\int_\delta^{2\pi-\delta} |\rho_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ces suites se "rapprochent" de la __masse de Dirac, au sens suivant__

__Théo__ : soit (ρ_n) une suite régularisante.

Alors
- $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\|\rho_n * f - f\|_\infty \longrightarrow 0$
- $\forall f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$, $(p<\infty)$ $\quad \|\rho_n * f - f\|_p \longrightarrow 0$

Malheureusement, (D_N) n'est pas une suite régularisante car $\lim \|D_N\|_1 = +\infty$. Par contre (K_N) en est une.

__Conséquence__: Théorème de FEJER

- si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\quad \sigma_N(f) \longrightarrow f$ uniformément
- si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$, $\quad \sigma_N(f) \xrightarrow{\mathbb{L}^p} f$

Il y a plusieurs conséquences importantes :

- l'injectivité de γ : Une fonction est déterminée par ses coefficients de Fourier
- Si $\sum |c_n(f)| < +\infty$, Alors $S_n(f) \to f$ ~~uniformément~~
- Par le théorème d'isomorphisme de Banach, et l'exemple de la suite (D_N), [redacted]

on montre que $\gamma(\mathbb{L}^1) \neq \ell$...

- Théorème de WEIERSTRASS trigonométrique

  Vect$\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour $\|\cdot\|_\infty$

  Théorème de WEIERSTRASS

  les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$

2) Convergence en moyenne quadratique

$\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\,d\lambda$ est un Hilbert

et $\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$ (famille orthonormale)

__Conséquence__ : Inégalité de Bessel

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}),\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

De plus, le théorème de Fejer pour $p=2$ assure que (e_n) est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. γ réalise donc un isomorphisme de Hilbert $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Concrètement, on a

__Théorème__ : Égalité de Parseval

$$\forall f,g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}), \quad \int_{\mathbb{T}} f(t)\bar{g}(t)\,d\lambda(t) = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,d\lambda(t) = \sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Application: $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n\geq1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

III - SÉRIES DE FOURIER DE FONCTIONS RÉGULIÈRES

1) Convergence ponctuelle

__Théorème__ : Dirichlet

soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, et soit $x_0 \in \mathbb{T}$. On suppose :

- $\lim_{t\to x_0^+} f(t)$ et $\lim_{t\to x_0^-} f(t)$ existent (on les note f^+ et f^-)
- $\exists \delta > 0$ tq $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f^+|}{t}\,d\lambda(t) < +\infty$, et $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)-f^-|}{t}\,d\lambda(t) < +\infty$

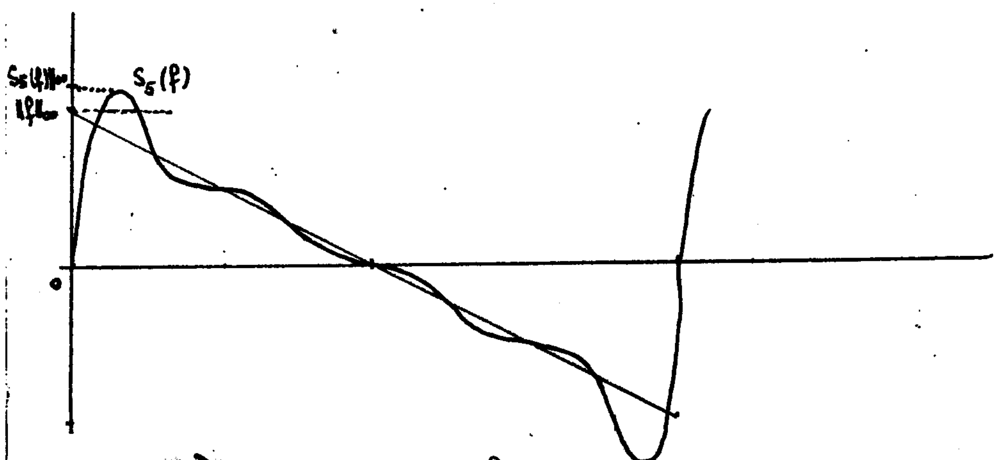
Corollaire
Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{T}$, on a le même résultat

Application :

- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2} \quad \forall a \neq 0$
- $\displaystyle\pi \cot(\pi a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n\geq 1} \frac{1}{a^2 - n^2} \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Rq : si f n'est pas continue, on ne peut évidemment pas avoir convergence uniforme. On observe des oscillations de Gibbs

Exemple : $f(t) := \pi - \frac{t}{2}$ sur $[0, 2\pi[$
$(S_N(f))$ est appelé alors noyau de Gibbs
on a • $S_N(f) \longrightarrow f$ simplement sur $]0, 2\pi[$
• mais $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \|S_N(f)\|_\infty > \|f\|_\infty$



2) Convergence uniforme

Théo :
si f est $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{T}$, alors
$S_n(f) \longrightarrow f$ uniformément

Théo : BERNSTEIN
si f est α-höldérienne sur $\mathbb{T}$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$, alors

Plus la fonction est régulière, plus la convergence est rapide :
Théo
si $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$ alors $\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \frac{1}{n^{p-1}} \|f^{(p)}\|_\infty$

IV - APPLICATIONS DIVERSES

1) Equation de la chaleur

On cherche $u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$, $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$
telle que
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{dans } Q \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = h(x) & \forall x \in [0,L] \end{cases}$$ avec $h \in \mathcal{C}^1([0,L])$

L'unique solution est donnée par :
$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t}} \quad \text{où } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

2) Inégalité isopérimétrique

Théo : $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, injective sur $[a,b[$ telle que $\Gamma(a) = \Gamma(b)$.
soit L sa longueur, S sa surface enfermée
Alors : $\boxed{L^2 \geq 4\pi S}$ et on a égalité ssi Γ définit un cercle

3) Formule de Poisson

soit $F \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier :
$$\hat{F} : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x t} F(t)\, dt$$

Théo :
soit $F \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On suppose que :

- $\exists M > 0, \alpha > 1, \ |F(x)| \leq M(1 + |x|)^{-\alpha}$
- $\sum_{\mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < \infty$

Alors : $\boxed{\sum_{\mathbb{Z}} F(n) = \sum_{\mathbb{Z}} \hat{F}(n)}$ Applica° : $\frac{\pi}{a} \coth(\pi a) = \sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2}$, $a > 0$

4) Recherche de solutions périodiques à des EDO

Exemple : $y^{(4)} + 5y'' + 4y = |\sin 2t|$ (E)
le développement du second terme en séries de Fourier permet de trouver une solution particulière :
$u(t) = \frac{1}{\dots} \frac{1}{\dots} \sum^{\infty} \frac{1}{\dots} \cos(4nt)$