230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

I. Généralités

I.1. Définition et premières propriétés

Déf : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série à terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}$ $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$. S_n est appelée la somme partielle d'indice n.

$\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite s'appelle la somme de la série et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, on appelle reste d'indice n l'élément R_n défini par $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

ex : série géométrique de raison q $\sum_{n} q^n$ converge si $q<1$, diverge sinon

pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q<1$ $S=\frac{1}{1-q}$ et $R_n=\frac{q^{n+1}}{1-q}$

prop si $\sum u_n$ converge, $R_n \to 0$

prop L'ensemble des séries convergentes forment un sous espace vectoriel de l'ensemble des séries numériques.

prop si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

Rq Cette condition nécessaire n'est pas suffisante ex : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

prop si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge, alors $u_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$

Rq condition non suffisante ex : $u_n=\frac{1}{n\ln n}$

I.2 critère de Cauchy et convergence absolue

critère de Cauchy : Une série $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge ssi $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \forall p\in\mathbb{N}, |u_n+\dots+u_{n+p}|<\varepsilon$

Déf La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge

Th Toute série absolument convergente est convergente

Rq La réciproque est fausse ex : $u_n=\sum(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)$

Ainsi, on est souvent ramené à prouver la convergence d'une série à termes positifs

II. Séries à termes positifs

II.1 première propriété et théorèmes de comparaison

Th Une série à termes réels positifs converge ssi la suite (S_n) est majorée

Dans la suite, on suppose $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs

Th1 : $\forall n$, $u_n\leq v_n$. Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

ex : • $\sum\frac{1}{n^2}$ converge par comparaison avec $\sum\frac{1}{n(n+1)}$

• démonstration du théorème du point fixe

Th2 : (i) si $v_n=O(u_n)$ lorsque $n\to+\infty$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge

(ii) si $u_n\sim v_n$ lorsque $n\to+\infty$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

application : Séries de Riemann

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha>1$

Th3 : $u_n\sim v_n$ quand $n\to+\infty$

(i) si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et les restes vérifient $\sum_{k\geq n} u_k\sim\sum_{k\geq n} v_k$ qd $n\to+\infty$

(ii) si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient $\sum_{k=0}^{n} u_k\sim\sum_{k=0}^{n} v_k$ qd $n\to+\infty$

application : développements asymptotiques de certaines séries

ex : $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}=\log n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)$ où γ est la constante d'Euler

II.2 quelques critères de convergence

prop Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq\frac{v_{n+1}}{v_n}$

Alors (i) si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge

(ii) si $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge

règle de D'Alembert Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda\in[0,+\infty[$

Alors (i) si $\lambda<1$, $\sum u_n$ converge

(ii) si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge
(iii) si $\lambda = 1^+$, $\sum u_n$ diverge

ex : $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge

application : les nombres de Liouville, de la forme $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{10^{n!}}$ avec $u_n \in [\![0,9]\!]$ strictement positifs à partir d'un certain rang, sont transcendants

règle de Cauchy : Soit $\sum u_n$ à termes strictement positifs telle que $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0,+\infty]$

Alors (i) si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge
(ii) si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge
(iii) si $\lambda = 1^+$, $\sum u_n$ diverge

ex : $\sum \frac{1}{2^n}$ converge

Rq : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$. D'où D'Alembert $\Rightarrow$ Cauchy

⚠ La réciproque est fausse

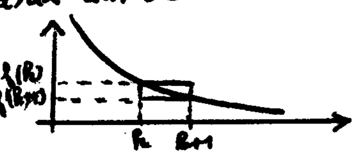
règle de Raab-Duhamel : Soit (u_n) une série à termes strictement positif telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ avec $\beta > 1$, alors la suite $(n^\alpha u_n)$ admet une limite finie non nulle et si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge
et si $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge

application : équivalence de $n!$ (formule de Stirling)

II.3. comparaison d'une série à termes positifs et d'une intégrale

Th : Soit f une fonction réelle positive, définie et décroissante sur $[0,+\infty[$. La série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature

Rq : $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} \sim \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$



application : on retrouve le résultat sur les séries de Riemann.
Séries de Bertrand : On appelle ainsi les séries de la forme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Elles convergent si : $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

Rq : le critère de décroissance de f est indispensable ex : $f(x) = |\sin(2\pi x)|$

$\boxed{\text{III. Séries à termes quelconques}}$

Th Soit (u_n) une suite de réels ou complexes et $\sum a_n$ une série à termes positifs tels que $u_n = O(a_n)$. Alors si $\sum a_n$ converge, $\sum u_n$ converge absolument.

III.1. séries alternées

Def Ce sont les séries réelles $\sum u_n$ dont les termes changent alternativement de sens. $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Th : Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge et
$\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k \geq n+1} (-1)^k a_k$ vérifient $|R_n| \leq a_{n+1}$

ex : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergent

. nous permet de montrer que (ii) du théorème de comparaison n°2 ne marchent qu'avec des séries à termes constants.
c.ex : $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ diverge or $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qd $n \to +\infty$

III.2. règle d'Abel

transformation d'Abel : Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \alpha_n v_n$. Effectuer une transformation d'Abel sur la série $\sum u_n$, c'est écrire
$\forall n$ $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$ avec $S_k = \sum_{i=0}^{k} v_i$

règle d'Abel 1) Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a $u_n = \alpha_n v_n$ où (α_n) est une suite positive décroissante et tendant vers 0. Et la série $\sum v_n$ est bornée par M. Alors $\sum u_n$ converge et $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $R_{m-1} \leq 2M\alpha_m$

2) Soit $\sum u_n$ où $u_n = \alpha_n v_n$ avec
. $\exists M > 0$, $\forall n \geq 0$, $\forall p \geq 0$ $\left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k \right| \leq M$
et la série $\sum_{n \geq 0} |\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ converge et $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $R_{m-1} \leq 2M\alpha_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

ex : • $v_n = (-1)^n (a_n)$ une suite positive décroissante $\Rightarrow$ Théorème des séries alternées

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour tout θ non multiple de 2π

III.3. produit de séries

Th Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Soient U et V leurs sommes. La famille $(u_m v_n)$ est sommable et a pour somme UV.

produit de Cauchy : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes de somme U et V. La série $\sum_{p\geq 0} \omega_p$ où $\omega_p = \sum_{m+n=p} u_m v_n$ est absolument convergente et a pour somme UV.

Rq : Théorème de Mertens : l'une des deux séries peut n'être que semi-convergente. Mais c'est faux si les deux sont semi-convergentes ex : $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

IV. Utilisation de fonctions pour l'étude de séries

IV.1 La formule d'Euler Mac Laurin

Th Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$

Alors on a
$$\sum_{p=m}^{n} f(p) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{k=2}^{r} \frac{(-1)^k b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,dt$$

où b_p sont les nombres de Bernoulli

application : • développement asymptotique de $\sum \frac{1}{n}$

Grâce à la formule à l'ordre 1, on a :

prop : si $\int |f'(t)|\,dt < +\infty$ où $f \in \mathcal{C}^1$, $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature

$\to$ prolongement de $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ à $\{\mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$

IV.2 Les séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence

règle de D'Alembert : Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ avec $\lambda \in [0,+\infty]$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$

règle de Cauchy : Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda \in [0,+\infty]$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$

Théorème taubérien fort : Soit (a_n) une suite réelle avec $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ telle que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que sa somme F vérifie $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \ell$. Alors la série $\sum a_n$ converge et sa somme vaut ℓ.

ex $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$

IV.3. Les séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique et localement intégrable sur $\mathbb{R}$

On appelle coefficients de Fourier de f, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-\frac{2i\pi n t}{T}}\,dt$

et la série de Fourier associée à f $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\frac{\pi}{T}nx}$

égalité de Parseval : Pour tout f T-périodique et continue par morceaux

on a $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$

ex : $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Théorème de Dirichlet : Si f est T-périodique continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement vers f.

ex : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ avec $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,\pi]$

vitesse de convergence de la série de Fourier : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^p$. $S_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de sa série de Fourier

On a alors $|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{n^{p-1}} \times \max_{x\in[0,2\pi]} |f^{(p)}(x)|$

IV.4. La transformée de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x t} f(t)\,dt$

Formule sommatoire de Poisson : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors on a $\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n)$

Rq La formule sommatoire de Poisson reste vraie si la fonction F est de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

ex : $f(x) = e^{-2\pi a|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$ On a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$ avec $a > 0$

Références :
- Gourdon Analyse
- Deschamps-Warusfel Mathématiques 2ème année
- Combes suites et séries
- Z.Q
- Pommelet
- Hauchecorne contre exemples
- oraux X-ENS analyse 1
- Chambert-Loir, Fermigier, Maillot exercices de Mathématiques pour l'agrégation analyse 1