Utilisation de théorèmes de point fixe

0. Théorèmes de point fixe [Rou]

1. Théorème du point fixe de Banach-Picard

Th . Soit (X,d) un espace métrique complet (BA)
. $f : X \to X$ une application tq $\exists k < 1$,
$\forall x,y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$

ALORS $\exists !\, u \in X,\ f(u) = u$.

De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite $\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ converge vers u et $\forall n \geq 1$, $d(x_n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$

2. Théorème du point fixe de Brouwer (BR)

Th Toute application de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet (au moins) un point fixe.

{ pareil avec X conv. compact en dim. finie

3. Théorème du point fixe de Schauder (SC) } p. 79 Zuily

Th . Soit E un evn et X une partie convexe fermée de E
. $F : X \to X$ continue tq $F(X)$ soit relativement compacte

ALORS F admet (au moins) un point fixe.

4. Théorème de Markov Kakutani [CL3 p. 19]

Th . Soit E un evn et $\mathcal{F}$ une famille d'applications (MK) affines continues $E \to E$ commutant 2 à 2
. $K \subset E$ un convexe compact non vide tq $T(K) \subset K$, $\forall K \in \mathcal{F}$

ALORS $\exists x \in E,\ \forall T \in \mathcal{F},\ T(x) = x$

Rajouter compact convexe [R p. 158]
Rouvière

I. Utilisation en analyse numérique [Rou]

1. Méthodes itératives de résolution de problèmes linéaires

Pb : résoudre $AX = b$ $\quad A \in \mathcal{M}_n(K)$, $x, b \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$

méthode : on se ramène à résoudre
$$x = M^{-1}(Nx + b)$$ (BA)
en écrivant $A = M - N$ avec $M \in GL_n(K)$

Proposition : une méthode itérative est convergente (ie $x^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} A^{-1}b$) SSI $\exists$ une norme $\|\cdot\|$ tq $|||M^{-1}N||| < 1$ [Serre p. 100]

2. Méthode de Newton (BA)

Pb : résoudre "$f(x) = 0$" où f C^1, $f' > 0$

méthode : chercher le point fixe de $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Exple : recherche de la racine carrée de $a \in \mathbb{R}_*^+$

$f(x) = x^2 - a \qquad F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$

La suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_0 \text{ proche de } \sqrt{a} \\ x_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$ converge vers $\sqrt{a}$.

3. Inverse d'une matrice (BA)

Pb : soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Calculer A^{-1}.

méthode : $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto 2X - XAX$

La suite (X_n) définie par $\begin{cases} X_0 \text{ assez proche de } A^{-1} \\ X_{n+1} = F(X_n) \end{cases}$ converge vers A^{-1}

II. Utilisation en calcul différentiel [OA] et [Rou]

1. Théorème d'inversion locale [Rou]

Th (BA)
- Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$
- $f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1 tq $Df(a)$ inversible

ALORS $\exists$ un ouvert $V \subset U$ contenant a tq f est un C^1 difféomorphisme de V sur $f(V)$.

Application : racine k-ième d'une matrice [OA]
Il existe 2 voisinages U et V de I_n tq
$\forall A \in V, \quad \exists B \in U, \quad B^k = A$.

2. Théorème des fonctions implicites [Rou]

Th (BA)
- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$
- Soient $(a,b) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ C^1

tq $f(a,b) = 0$
et $D_y f(a,b)$ inversible

ALORS $\exists \hat{U} \in \mathcal{V}_a, \ \hat{V} \in \mathcal{V}_b$ et une unique application $\varphi : \hat{U} \to \hat{V}$ C^1
tq $\forall (x,y) \in \hat{U} \times \hat{V}, \quad f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$

Application : régularité d'une racine simple d'un polynôme. [OA]
Soit x_0 racine simple de $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$.
Alors $\exists \varphi$ C^1, $\varphi : \mathcal{U} \to V$ avec $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_{P_0}$, $V \in \mathcal{V}_{x_0}$
tq $\forall P \in \mathcal{U}, \forall x \in V, \quad x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$

3. Champ rentrant dans une sphère [Rou]

Proposition : (BR) Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
Soit $v : B \to \mathbb{R}^n$ un champ continu, rentrant sur S
(ie $\forall x \in S, \quad \langle x, v(x) \rangle < 0$)
ALORS v s'annule en au moins un pt de B.

III. Résolution d'équations différentielles

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz [Rou]

Th (BA)
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
- $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue, localement lipschitzienne par rapport à sa 2e variable

ALORS $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ où $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $t_0 \in I$
admet une unique solution dans un voisinage de t_0.

Exple : $\begin{cases} u'' = -\sin u \\ u(0) = a \\ u'(0) = b \end{cases}$ (problème du pendule)

2. Théorème de Cauchy-Péano

Th (SC)
- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $y_0 \in U$, $t_0 \in I$
- $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue

ALORS $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution.

Exple : $\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3. Résolution d'équations aux dérivées partielles [BRE]

Th (Stampacchia) (BA)
- Soit H un Hilbert
- $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive (ie $\exists \alpha > 0, \ \forall v \in H, \ a(v,v) \geq \alpha |v|^2$)
- Soit $K \subset H$ convexe fermé non vide et $\varphi \in H'$.

ALORS $\exists ! u \in K, \quad \forall v \in K, \quad a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle_{H' \times H}$

Corollaire : théorème de Lax-Milgram
Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive
ALORS $\forall \varphi \in H', \quad \exists ! u \in H$ tq $a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle_{H' \times H}$ $\forall v \in H$.

Application : problème de Dirichlet homogène.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert borné.
$\exists ! u : \overline{\Omega} \to \ ) \ C^2$ tq $\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

IV. Equations intégrales [Rou p. 172]

Cadre : $I=[a,b]$ et $K : I\times I \to \mathbb{R}$ continue (noyau)
E espace des fonctions réelles continues, muni de $\|\cdot\|_\infty$
$\varphi \in E$

1. Equation intégrale de Fredholm

L'équation $x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, ds$, $t\in I$,
admet une unique solution $x\in E$ (BA)
si $(b-a) \max_{s,t\in I} |K(s,t)| < 1$

2. Equation intégrale de Volterra

L'équation $x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t)\, x(s)\, ds$, $t\in I$,
admet toujours une unique solution. (BA)

V. Probabilités et mesures

1. Existence et unicité d'une mesure de Haar [CL3 p.19]

Proposition : Soit G un groupe topologique compact commutatif.
ALORS $\exists$ une mesure μ sur G invariante par translation et
(MK) tq $\mu(G)=1$. (ie $\forall f\in \mathcal{C}(G), \forall g\in G$, $\int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_G f(gx)\, d\mu(x)$)

Application : Il existe un Banach E et F un sev fermé de E qui n'admet pas de supplémentaire topologique. [Ru p. 136]

2. Convergence d'une mesure de probabilité invariante

$\boxed{\text{Th}}$ Soit P une matrice stochastique ergodique ($\exists n\geq 0$, $P^n > 0$)
et Π sa probabilité invariante.
ALORS $\forall i,j \in E^2$, $P_{ij}^{(n)}$ converge vers Π_j et la vitesse de convergence est exponentielle.

Application : algorithme PageRank qui sert à Google pour classer les pages internet.

Livre p. 54 (Barron-Prob.)

VI. Géométrie

1. Géométrie plane [POM p.79]

$\boxed{\text{Th}}$ (des 3 fermés)
. Soient A, B, C 3 points non alignés de $\mathbb{R}^2$ (BR)
. Δ : enveloppe convexe de A, B, C.
. F_A (resp F_B, F_C) un fermé contenant [BC] (resp [AC], [AB])
tq $\Delta \subset F_A \cup F_B \cup F_C$
ALORS $F_A \cap F_B \cap F_C \neq \emptyset$

2. Géométrie euclidienne [ALE p.141]

(MK)

Proposition : Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$
ALORS il existe un produit scalaire euclidien $\langle\ |\ \rangle_G$ sur $\mathbb{R}^n$ tq ~~tout~~ élément de G soit orthogonal pour $\langle\ |\ \rangle_G$

VII. Exemples et contre exemples

1. Existence de courbe de Peano [RMS]

(ie application continue surjective de $[0,1]$ sur $[0,1]^2$) (BA)

2. Existence d'une fonction continue, nulle part dérivable

(BA) [RMS]

3. Fonction de Cantor Lebesgue [BP]

Proposition : $\exists$ une fonction f continue croissante sur $[0,1]$
tq $f(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'=0$ presque partout dans $[0,1]$. (BA)

4. Existence d'un Banach E et d'un sev fermé F de E qui n'admet pas de supplémentaire topologique

<u>Références :</u>

[ALE] Thèmes de géométrie, Alessandri
[BRE] Analyse fonctionnelle, Brezis
[CLi] Exercices de mathématiques pour l'agreg, analyse i, Chambert-Loir
[POM] Cours d'analyse, Pommellet
[ROU] Petit guide du calcul diff., Rouvière
[OA] Objectif agreg, Beck | Malick | Peyré
[Ru] Analyse fonctionnelle, Rudin
[Serre] Les matrices, Serre
[Gan] Théorie des matrices, tome 2, Gantmacher
[BP] Théorie de l'intégration, Briane Pagès
[RMS] RMS 01/98.

DEV possibles :

- Stampacchia
- fonctions implicites
- inversion locale
- fct° continue nulle part dérivable
- ss gpes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$
- Schauder (par Brouwer)