(207) PROLONGEMENT DE FONCTIONS - APPLICATIONS

I] Théorèmes de Hahn-Banach et conséquences.

Théorème (Hahn-Banach analytique)

Soit X $\mathbb{R}$-espace vectoriel et M sous-espace vectoriel de X.
Soit $p : X \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in X,\ p(x+y) \leq p(x)+p(y)$
$\forall x \in X, \forall t \geq 0,\ p(tx) = t p(x)$

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\forall x \in M,\ f(x) \leq p(x)$
Alors il existe $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ linéaire telle que
$\forall x \in M,\ \Lambda(x) = f(x)$
$\forall x \in X,\ -p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x)$.

Applications :

- Soit X $\mathbb{R}$-EV normé et M sous-espace vectoriel de X.
  Soit $f : M \to \mathbb{R}$ linéaire continue de norme $\|f\|_{M^*}$
  Alors il existe $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ linéaire continue telle que
  $\Lambda_{|M} = f$ et $\|\Lambda\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.

- $\ell^1(\mathbb{Z})$ n'est pas le dual de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$

- Soit $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$, $(x_n)_{n\geq 0} \longmapsto (y_n)_{n\geq 0}$ avec $y_n = x_{n+1}\ \forall n \geq 0$.

Alors il existe Λ forme linéaire sur ℓ^∞ telle que
$\Lambda \circ \tau = \Lambda$ et $\liminf_n x(n) \leq \Lambda(x) \leq \limsup_n x(n)\quad \forall x \in \ell^\infty$
Λ est appelée limite de Banach.

- $\forall x \in E$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé,
  $\|x\| = \sup\{|\langle f, x\rangle|,\ f \in E^*,\ \|f\| \leq 1\}$.

Applications :

- Soit F sous-espace vectoriel de X.
  F dense dans X ssi $\forall f \in X^*, (\forall x \in F,\ f(x) = 0) \Rightarrow (f \equiv 0 \text{ sur } X)$
- Exemple : $\mathrm{Vect}\left(\frac{1}{x-a},\ a \in \mathbb{N},\ a \geq 2\right)$ dense dans $\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$

II] Prolongement par densité.

Cas simple : Prolongement par continuité en un point.
Soient (E,d), (F,δ) espaces métriques, $A \subset E$, $a \in \overline{A}$.
Soit $f \in A \mapsto F$ continue. Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe, f se prolonge continuement sur $A \cup \{a\}$.

Idée : L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.

Cas particulier : Une fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ dérivable de dérivée bornée au voisinage de 1 se prolonge par continuité en 1.

1] Prolongement uniformément continu.

Théorème :

Soient (E,d) espace métrique et (F,δ) espace métrique complet.
Soit A partie dense de E.
Soit $f : (A,d) \to (F,\delta)$ uniformément continue.
Alors il existe une unique application continue $g : E \to F$ telle que $g_{|A} = f$, et g est uniformément continue.

Application :

Unicité du complété d'un espace métrique à isométrie près

2) Cas particulier des applications linéaires.

Corollaire :

Soit E espace vectoriel normé, F espace de Banach,
A sous-espace vectoriel dense de E et $f : A \to F$ linéaire continue.
Alors il existe une unique application linéaire continue
$g : E \to F$ telle que $g_{|A} = f$ et $\|g\| = \|f\|$.

Applications :

- Adjoint : Soient E, F Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ opérateur à domaine dense.
$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in F', \exists c \geq 0, \forall u \in \mathcal{D}(A), |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\|\}$
$\forall v \in \mathcal{D}(A^*)$, $g_v : \begin{array}{l}\mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \langle v, Au\rangle\end{array}$ se prolonge en $f_v : E \to \mathbb{R}$
telle que $\forall u \in E$, $|f_v(u)| \leq c\|u\|$. $A^* : \begin{array}{l}\mathcal{D}(A^*) \longrightarrow E' \\ v \longmapsto f_v\end{array}$ est appelé adjoint de A.

- Les fonctions réglées sont l'adhérence des fonctions en escalier = Esc. L'intégrale définie sur Esc se prolonge aux fonctions réglées.

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\mathcal{B}$ sous-tribu de $\mathcal{A}$. L'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{B}$ définie sur $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ définie comme la projection sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ se prolonge en une application de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

- $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
La transformée de Fourier, définie sur $L^1(\mathbb{R})$ se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple : Soit $g(y) = \frac{1}{y} \mathbb{1}_{[-1,1]^c}(y)$. $\hat{g}(t) \overset{p.p.}{=} 2i\,\mathrm{sg}(t) \int_{|t|}^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv$

Proposition : Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \cdot \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
et $f * g \overset{L^2}{=} \widehat{(\hat{f} \cdot \hat{g})}$

III Prolongement et régularité.

1] Prolongement des fonctions régulières :

- Proposition : Soient E, F espaces vectoriels normés, $\dim E \geq 2$, $r > 0$ / $U = B(0, r) \setminus \{0\} \subset E$. Soit $f : U \to F$ différentiable.
Si $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} df(x) = \ell \in \mathcal{L}(E, F)$ existe, alors f admet un prolongement $\tilde{f}$ différentiable en 0 et $d\tilde{f}$ continue en 0.
(Si $\dim E = 1$, rajouter f continue sur $B(0, r) =]-r ; r[$)
Exemple : $x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$, $x > 0$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction C^∞ dont toutes les dérivées en 0 sont nulles.

Applications : * Construction de fonctions plateaux
* Existence d'une fonction C^∞ non développable en série entière.

- Proposition : Soit $a \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Si f est bornée sur un voisinage épointé de a, alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

Exemple : $z \longmapsto \frac{\sin z}{z}$ se prolonge en 0.

2] Solution maximale d'une équation différentielle.

Soient $\begin{cases} I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \\ \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \end{cases}$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue, $y_0 \in \Omega$; $t_0 \in I$.
Le problème $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet au moins une solution maximale définie sur un ouvert J dans I.

Critères de prolongement :

- Si $I =]a,b[$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$, si $(y,]c,d[)$ solution maximale,
Ou bien $d = b$, ou bien $d < b$ et alors $\lim_{t \to d} |y(t)| = +\infty$

Ainsi, si $(y,]\alpha,\beta[)$ est une solution telle que x est bornée au voisinage de β, x peut être prolongée au delà de β en une solution de l'équation.

- Si $f :]a,b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue bornée, toute solution est globale.

Exemple : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^4(t)}{1+x^4(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $]-\infty,+\infty[$.

- Si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie
$\forall K$ compact de I, $\exists C_1 > 0, \exists C_2 > 0$, $\forall (t,x) \in K \times \mathbb{R}^n$ $|f(t,x)| \leq C_1 |x| + C_2$
Alors toute solution est globale.
C'est le cas des équations différentielles linéaires.

3) Théorème de Tietze.

Proposition : Soit (E,d) espace métrique, Ω ouvert de E, F fermé de E, $F \subset \Omega$.

Alors $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{d(x,\Omega^c)}{d(x,\Omega^c)+d(x,F)}$ est un prolongement continu de $f : \begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$, tel que $f_{|\Omega^c} = 0$.

Théorème de Tietze :
Soit E espace métrique, $F \subset E$ fermé et $f \in \mathcal{C}^0(F)$
Alors $\exists F \in \mathcal{C}_c^0(E)$, $f = F_{|K}$.

Application : Théorème de Lusin, qui permet de montrer la densité de $\mathcal{C}_c^0$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

IV) Holomorphie, analycité.

1) Principe du prolongement analytique.

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ coïncident sur $V \subset \Omega$ contenant un point d'accumulation, alors $f \equiv g$ sur Ω.

Contre-exemple : $x \mapsto \sin \frac{\pi}{x}$ et $x = 0$ sur $]0,1[$

Exemple : $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

2) Points singuliers.

Soit f une série entière de rayon R, $\Gamma = \mathcal{C}(0,R)$, $D = D(0,R)$
$a \in \Gamma$ est régulier s'il existe D_a disque ouvert centré en a tel que f admette un prolongement analytique dans $D \cup D_a$
Sinon, a est dit singulier.

Théorème : Il y a toujours au moins un point singulier sur Γ.

Exemple : $\{1\}$ est l'unique point singulier de $\sum_1^\infty n^{-\alpha} z^n$, $\alpha > 0$

3) Exemples de prolongements holomorphes :

- $\Gamma : x \in]0,+\infty[\mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$
- $\zeta : x \in]1,+\infty[\mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$
- $\log$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$
Cela permet de définir les fonctions puissances sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

Références : Zuily Queffélec, Gourdon, Rudin (les 2)
Gonord-Tosel, Ouvrard 2, Brézis.