214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

I - Résultats principaux

I-1) Les théorèmes

Th : [Inversion locale] [ROU]

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $Df(a)$ est inversible. Alors, il existe un voisinage ouvert V de a inclus dans U et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W.

Rmq : On peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$ dans l'hypothèse et la conclusion.

Th : [Fonctions implicites] [ROU]

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, (a, b) un point de U et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la différentielle partielle par rapport à la deuxième variable $D_y f(a,b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V (resp. W) de a (resp. de b) avec $V \times W \subset U$ et une application $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$\big((x,y) \in V \times W \text{ et } f(x,y) = 0 \big) \iff \big(x \in V \text{ et } y = \varphi(x) \big)$$

De plus, pour tout $(x,y) \in V \times W$ $D_y f(x,y)$ est inversible et pour tout $x \in V$ $D\varphi(x) = -\big(D_y f(x, \varphi(x))\big)^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$

Rmq : On peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$ dans l'hypothèse et la conclusion.

I-2) Résultats liés.

Th : [Application ouverte] [GOU]

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout x de U, $Df(x)$ est inversible. Alors f est ouverte.

Th : [Inversion globale] [GOU]

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et injective. On suppose que pour tout x de U $Df(x)$ est inversible. Alors f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Rmq : On peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$ dans l'hypothèse et la conclusion.

⚠ : L'injectivité est nécessaire ; considérer

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto e^x(\cos(y), \sin(y))$$

Exemple d'utilisation : changement de variables.

Th : [Inversion globale holomorphe] [ROU]

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Si f est injective sur U alors f réalise un automorphisme de U sur $f(U)$.

Th : [Rang constant] [ROU]

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que le rang de la différentielle de f est constant sur U. Alors il existe un changement de coordonnées locales au départ et un changement de coordonnées locales à l'arrivée qui transforment f en l'application linéaire qui a pour matrice dans ces nouvelles coordonnées $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

II - Applications en algèbre et géométrie

II-1) Sous-variétés.

Déf : [sous-variétés] [LAF]

Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variétés de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $f : U \to V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$

Th : [des sous-variétés] [LAF]

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ les assertions suivantes sont équivalentes :

i) M est une sous variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

ii) Pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x, et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$

iii) Pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0, et une application $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion, et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.

iv) Pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(x_1, \dots, x_p)$ et une application f de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées $U \cap M$ soit égal au graphe de f.

Rmq : • Ce théorème est une conséquence du théorème du rang constant.

• On définirait de même une sous variété de classe $\mathcal{C}^k$ en remplaçant difféomorphisme par $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme dans la définition. On aurait le même théorème mutatis mutandis.

Exemples : • La sphère S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension $n-1$.

• Un ouvert est une sous-variété de dimension n (dans $\mathbb{R}^n$)

II-2) Étude de $M_n(\mathbb{R})$

Prop : Les ensembles suivants sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$

[MT]

i) $O_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ (considérer la submersion $g(M) = {}^tMM - I_d$)

ii) $SL_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 ($g(M) = \det(M) - 1$)

iii) l'ensemble des matrices de rang p est de dimension $p(2n-p)$.

On a en outre le résultat suivant :

Th : [Cartan - Von Neumann] [MT], [G-T] [DVLPT]

Tout sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

Rmq : On retrouve i) et ii).

Les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites permettent de prouver d'autres résultats :

• l'existence pour $k \in \mathbb{N}^*$ de la racine k-ième d'une matrice dans un voisinage de l'identité.

[MT] • l'existence du logarithme d'une matrice dans un voisinage de l'identité.

• $Gl_n(\mathbb{R})$ n'a pas de sous-groupe non trivial arbitrairement petit.

II-3) Champs de vecteurs

Déf : Un champ de vecteurs est une application $X : U \to \mathbb{R}^n$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Th : [redressement d'un champ de vecteurs] [ROU]

Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ où U est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in U$ et y la solution du système différentiel

$$(S) : \begin{cases} \frac{dy}{dt} = X(y) \\ y(0) = x \end{cases}$$ (On note $y(t) = \varphi_t(x)$).

Si $v(0) \neq 0$ il existe un changement de coordonnées locales $y = f(Y)$ au voisinage de 0 qui transforme (S) en $\begin{cases} \frac{dY}{dt} = V \\ Y(0) = f^{-1}(x) \end{cases}$

avec $V = (1, 0, \dots, 0)$.

Application : Le comportement des points réguliers est toujours le même.

Lemme : [Milnor] [GT]

Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert convexe borné vérifiant $K \subset \Omega \subset \bar{\Omega} \subset U$.

Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $X_t : U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + tX(x)$

alors $\exists\, \alpha > 0$ tel que si $|t| < \alpha$ X_t réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur $X_t(\Omega)$.

De plus $t \in]-\alpha,\alpha[\mapsto \lambda(X_t(K))$ est polynômiale

Th : [Boule chevelue] [GT]

Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3.
Alors tout champ de vecteurs continu X de S^{n-1} dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in S^{n-1}$ $\langle X(x), x\rangle = 0$ s'annule en au moins un point.

III. Applications en analyse.

III-1) Résolution d'équations

Le lemme de Milnor permet de démontrer le résultat suivant : [GT]

Lemme : [non rétraction] Il n'y a pas d'application $f : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in S^{n-1}$ $f(x) = x$.

Application **Th [Brouwer]** : Toute application continue de B^n dans B^n admet un point fixe. [GT]

Th : [D'Alembert-Gauss] : Tout polynôme complexe non constant admet une racine. [GT]

Prop : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, soit x une racine simple de P. [ROU]
Alors x dépend localement de P de manière $\mathcal{C}^\infty$.

III.2) Etude d'extrema

Lemme [de Morse] : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ inversible. Il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ défini sur un voisinage W de 0 tel que $\forall x \in W$,
$f(x) = \ell_1^2(x) + \ldots + \ell_r^2(x) - \ell_{r+1}^2(x) - \ldots - \ell_n^2(x)$ où $(r, n-r)$ est la signature de $D^2 f(0)$. [GOU]

Rmq : On retrouve, si $D^2 f(a)$ est définie positive ou négative, les conditions d'extrema en 0.

Th : [Extrema liés] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f, g_1, \ldots, g_r$ de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\Gamma = \{x \in U \mid \forall i \in [\![1,r]\!]\ g_i(x) = 0\}$.
Si $f|_\Gamma$ admet un extremum en $a \in \Gamma$ et si $(Dg_i(a))$ est libre alors, il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (multiplicateurs de Lagrange) tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Dg_i(a)$ [DVLPT] [GOU]

Applications : • Toute matrice symétrique réelle admet une valeur propre réelle

[ROU] • On retrouve l'inégalité d'Hadamard : Si $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$
$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leqslant \|v_1\|_2 \ldots \|v_n\|_2$

• Billard elliptique : il existe une trajectoire fermée à 3 rebonds sur un billard elliptique.

III.3) EDP

On considère l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} a(u)\, \partial_x u + \partial_y u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

avec $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

En résolvant le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(z), & x(0) = s \\ \dfrac{dy}{dt} = 1, & y(0) = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} = 0, & z(0) = f(s) \end{cases}$$

[ROU]

On peut lier indépendamment de s et t les variables x, y et z. Grâce au théorème des fonctions implicites, on montre que cette relation définit localement z comme fonction de x et y : $z = u(x,y)$ et u est solution de l'équation de Burgers.

Références

[ROU] Rouvière, Petit guide de calcul différentiel
[GOU] Gourdon, Analyse
[GT] Gonnord - Tosel, Calcul différentiel
[MT] Mneimné - Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques
[LAF] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles