247 - EXEMPLES DE PROBLÈMES D'INTERVERSION DE LIMITES

① INTERVERSION LIMITE - LIMITE.

Thm 1 [Double limite] : Soient A une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, F un espace de Banach, a un point adhérent à A et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans F qui converge uniformément vers f sur A. Si : $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n \in F$, alors en posant $b = \lim\limits_{n\infty} b_n$, on a aussi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, i.e : [GJ]

$$\lim_{n\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\infty} f_n(x)\right).$$

Ex 1 : en prenant $f_m = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_j(m)$ avec $u_j : \begin{cases} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} (1-\frac{j}{x})^x & \text{si } x \geq j \\ 0 & \text{si } x < j \end{cases} \end{cases}$

on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^m = \frac{e}{e-1}$. [GJ]

Ex 2 : en calculant la limite en $x \to 0$ de $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(k^2 - (\frac{x}{\pi})^2\right)}$,

on obtient. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$. [N]

Ex 3 : [Thm de continuité d'une limite uniforme d'une suite de fonctions]

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de A dans F (Banach) qui converge uniformément sur A vers $f : A \to F$. alors f est continue sur A. [GJ]

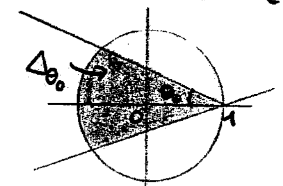
↳ **Corollaire** : la somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

C-ex 4 : $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n z^m = f(z)$ $\forall |z| < 1$ $f(z) = \frac{1}{1+z} \xrightarrow[z\to 1]{} \frac{1}{2}$ et pourtant $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^m$ diverge.

Thm 2 [Théorème d'Abel angulaire] [Gou]

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme S. On suppose que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ et $\exists (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim\limits_{\substack{z \to R \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_m$.



Applications :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

② INTERVERSION LIMITE - INTÉGRALE.

Ex 5 : [Fonction Γ] [ZQ]

La fonction Γ définie par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur $\Delta_0 = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

Ex 6 : [Formule sommatoire de Poisson] [ZQ]

On pose : $\forall F \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-2i\pi x t}\,dt$

Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ telle que : $\exists M > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ $|F(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$ et $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty$.

Alors $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} F(n)$

Applications : • $\forall a > 0$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$

• $\forall s > 0$ $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\pi k^2/s}$, i.e $\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\theta(1/s)$.

où θ est définie par : $\theta(s) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s}$. [Gou]

<u>Ex 7</u> [Transformée de Laplace] [Pom]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue. Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors : $\forall \lambda > 0$ $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ converge et de plus :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\lambda \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\lambda t}\,dt.$$

<u>Application</u> :

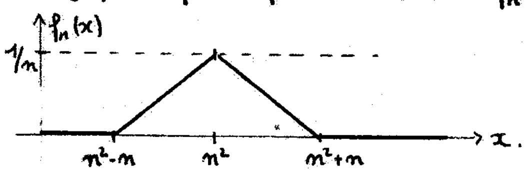
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$ [Pom]

<u>Ex 8</u> [Convergence monotone]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$ [GJ]

<u>C-ex 9</u> :

Soit $(f_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} + \frac{1}{n} - 1 & \text{si } x \in [n^2-n, n^2] \\ -\frac{x}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 & \text{si } x \in [n^2, n^2+n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



[H]

Alors $f_n \xrightarrow[n\infty]{CS} 0 = f$

Mais $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

③ INTERVERSION LIMITE - DÉRIVÉE

1/ Dérivation et convergence uniforme.

<u>Thm 3</u> : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I,F)$, où F est un espace de Banach de dimension finie, telle que : [GJ]

- $\forall 0 \leq j \leq k-1$ $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I
- $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g : I \to F$

Alors : • $f = \lim_{n\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et vérifie $f^{(k)} = g$.
• $(f_n^{(j)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$ $(\forall 0 \leq j \leq k)$.

<u>Ex 10</u> : la fonction somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{2^n i x}}{n!}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. [Pom]

<u>C-ex 11</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 et la suite $(f_n')_n$ diverge, alors que la fonction limite de la suite $(f_n)_n$ est dérivable. [H]

⚠ ATTENTION ! Une limite uniforme de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ peut n'être pas dérivable.

<u>Ex 12</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers $|x|$ qui n'est pas dérivable en 0. [Pom]

2/ Théorème de Schwarz.

<u>Thm 4</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur U, continues en un point $a \in U$. [Gou]

Alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$

<u>C-ex 13</u> : $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

4 INTÉGRALES ET SOMMES MULTIPLES

1/ Sommes multiples.

Thm 5 [Fubini] : Soit $(a_{m,n})$ une suite double de $\mathbb{C}$. [N]

alors $\sum_n \sum_m |a_{m,n}| = \sum_m \sum_n |a_{m,n}| \in [0,+\infty[$

Si, de plus $\sum_n \sum_m |a_{m,n}| < +\infty$, alors $\sum_n \sum_m a_{m,n} = \sum_m \sum_n a_{m,n}$.

Ex 14 : On a les développements en série entière suivants :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(e^x - 1) = \frac{1}{e} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p \geq 0} \frac{p^n}{p!} \right) x^n$ [Pom]

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{p \geq 0} \sin(a^p x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{1 - a^{2k+1}}$ [MVT]

où $a \in]-1,1[$.

Ex 15 : $\sum_{p \geq 2} \sum_{q \geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p} = \frac{1}{2}$. [Mad]

C-ex 16 : Soit $(u_{n,p})$ la suite définie par :

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \begin{cases} u_{nn} = 1 \\ u_{np} = 0 & \text{si } n > p \\ u_{np} = \frac{-1}{2^{p-n}} & \text{si } n < p \end{cases}$$ [H]

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{np} = 0 \neq 2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{np}$.

Rq : ici $S_n = \sum_{p \geq 0} |u_{np}|$ n'est pas le terme général d'une série convergente.

Thm 6 [Produit de Cauchy]

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors le produit de leurs sommes est la somme d'une 3ème série absolument convergente : [N]

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_m \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$$

Cette série s'appelle le produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$.

Ex 17 : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifie : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z+z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$.

Ex 18 : $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1 \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$.

Application au dénombrement : à l'aide de l'exemple 14, on montre que le nombre D_N de partitions de $[\![1,N]\!]$ vérifie :

$$D_N = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}$$ [MVT]

2/ Intégrales multiples.

Thm 7 [Fubini] Soit f continue intégrable sur $I \times I'$.

a) Si pour tout $x \in I$, $f(x,\cdot) : y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I' et si $F : x \mapsto \int_{I'} f(x,y)\,dy$ est continue par morceaux sur I, alors F est intégrable sur I et on a : [GJ]

$$\iint_{I \times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\,dy \right) dx$$

b) Si, de plus $f(\cdot,y) : x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I pour tout $y \in I'$ et si $G : y \mapsto \int_I f(x,y)\,dx$ est continue par morceaux sur I' alors cette fonction G est intégrable sur I' et on a :

$$\iint_{I \times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{I'} \left(\int_I f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Ex 19 : $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right) = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y}\,dy$. [GJ].

$\to$ On applique le théorème à $f(x,y) = y^x$ sur $\Delta = [a,b] \times]0,1[$.

Références :

[Gou] : Xavier Gourdon. Analyse.

[Pom] : Alain Pommelet. Cours d'analyse.

[H] : Bertrand Hauchecorne. Contre-exemples en mathématiques.

[N] : Ivan Nourdin. Agregation de mathématiques. Epreuve orale

[MVT] : Moisan / Vernotte / Tosel : Suites et séries de fonctions.

[GJ] : Guinin / Joppin. Analyse MP. Bréal.

[Mad] : Karine Madère. Leçons d'analyse.

[ZQ] : Zuily - Queffelec

Développements :

1/ Théorème d'Abel angulaire et applications

2/ Formule sommatoire de Poisson et application.