Leçon 238

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE. Exemples et applications

I) ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit E un espace métrique. On considère $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ et on pose

$$F(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$$

Th 1 : Continuité sous le signe intégral

On suppose les conditions suivantes vérifiées :

i) $\forall t \in E$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable

ii) pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E

iii) pour tout compact $K \subset E$, il existe $g_K \in L^1$ telle que pour presque tout $x \in X$, $\forall t \in K$

$$|f(t,x)| \leq g_K(x)$$

Alors F est définie et est continue sur E

Expl : Notons $H_0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$

La fonction Bêta d'Euler définie par :

$$B : \begin{cases} H_0 \times H_0 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \longmapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \end{cases}$$

est continue sur $H_0 \times H_0$ et vérifie les identités fonctionnelles :

$$\forall x, y \in H_0 \quad \begin{cases} B(x,y) = B(y,x) \\ B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y} B(x,y) \end{cases}$$

Th 2 : Dérivation sous le signe intégral

E est désormais un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et on suppose de plus que :

i) pour tout $t \in \Omega$, $x \longmapsto f(t,x) \in L^1$

ii) il existe $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$ tel que pour tout $x \notin N$ $t \longmapsto f(t,x) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists\, g_{\alpha,K} \in L^1$ telles que :

$\forall x \notin N, \forall t \in K$, $|D^\alpha f(t,x)| \leq g_{\alpha,K}(x)$

Alors 1) $\forall t \in \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha f \in L^1$

2) $F \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ et $D^\alpha F(t) = \int_X D^\alpha f(t,x)\, d\mu(x)$

Expl : La fonction Gamma d'Euler définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ est telle que :

i) Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^k\,dt$$

ii) $\forall x > 0$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(m+1) = m!$

iii) $\forall x > 0$, $\forall y > 0$ $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Th : Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés ci-dessous

i) $\mathbb{R}^{+*} \subset D_f$

ii) $\forall x > 0$, $f(x) > 0$ et $f(x+1) = x f(x)$

iii) $\log f$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$

iv) $f(1) = 1$

Alors $f = \Gamma$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Th 3 : Holomorphie sous le signe intégral

Soit ω un ouvert de $\mathbb{C}$. $f : \omega \times X \to \mathbb{C}$. Supposons

i) $\forall z \in \omega$, $x \longmapsto f(z,x) \in L^1$

ii) il existe $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$ tel que pour tout $x \notin N$, la fonction $z \longmapsto f(z,x)$ est holomorphe sur ω

iii) $\forall K$ compact de ω, il existe $g_K \in L^1$ telle que $\forall z \in K$, $\forall x \notin N$ $|f(z,x)| \leq g_K(x)$

Alors $F(z) = \int_X f(z,x)\,d\mu(x)$ est holomorphe sur ω

et $F'(z) = \int_X \dfrac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x)$

Expl d'utilisation :

Proposition : Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et $\{-1, -2, \dots\}$ sont des pôles simples

Théorème : $\dfrac{1}{\Gamma}$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}$ et ces zéros sont $\{-1, -2, \dots\}$

• La fonction Thêta de Jacobi définie pour $s > 0$ par

$\theta_J(s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 s} = \int_{\mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 s}\,d\mu_{\mathbb{Z}}(m)$ se prolonge holomorphiquement à H_0 et vérifie l'identité modulaire : $\forall z \in H_0$, $\theta_J(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}\theta_J\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Si on pose : $\tilde{\theta}_J(s) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 s}$ on a :

$\forall s > 0$, $\tilde{\theta}_J\left(\frac{1}{s}\right) = \tilde{\theta}_J(s)\, s^{1/2} + \dfrac{s^{1/2}}{2} - \dfrac{1}{2}$

• La fonction zêta de Riemann est définie par

$\forall s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^s}$

Th : ζ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \eta(s)$ où η est holomorphe sur $\mathbb{C}$

Th : Si on définit la fonction ξ par :

$\xi(s) = \zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{s/2} s(s-1)$

Alors ξ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et on a l'égalité fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$

Expl Les fonctions de Bessel sont définies par :

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $J_m(z) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta - z\sin\theta)\,d\theta$

II) INTÉGRALES SUR DES CHEMINS

On se donne $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert,
$f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe
$\gamma : [a;b] \to \Omega$ un chemin fermé, ie une application C^0, C^1 par morceaux avec $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Théorème / Définition : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$.
On définit l'indice de z par rapport à γ par $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$.
On a alors :
$Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$, et $Ind_\gamma : \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \to \mathbb{Z}$ qui est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$.

Théorème [Formule de Cauchy] : Supposons que γ soit homotope à un point dans Ω.
Soit $a \in \Omega \setminus Im(\gamma)$.
Alors on a $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = Ind_\gamma(a) . f(a)$.

Application : f holomorphe sur Ω
$\Rightarrow f$ analytique sur Ω ;
de plus, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \Omega$, on a :
$f^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz$, où γ est tel que $Ind_\gamma(a) = +1$.

Théorème [Formule des résidus] : Soient $\{x_1, \dots, x_m\}$ des points distincts de $\mathbb{C}$ tels que $D = \Omega \cup \{x_1, \dots, x_m\}$ soit simplement connexe.
Alors : $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{i=1}^{m} Res(f, x_i) . Ind_\gamma(x_i)$.

Applications :
- calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \xi x} dx$
- calcul de
- calcul de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$

III) CONVOLUTION ET RÉGULARISATION

déf : Soit $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurables, on dit que f et g sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$: $y \longmapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$
on définit alors le produit de convolution de f par g par : $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$

propriétés de supports :
Si f et g sont convolables on a :
i) $Supp(f*g) \subset \overline{Supp\, f + Supp\, g}$
ii) Si $Supp\, f$ est compact, $Supp(f*g) \subset Supp\, f + Supp\, g$
iii) Si f et g sont à supports compacts, $f*g$ aussi

Proposition :
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq +\infty$
alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Remarque :
$L^1(\mathbb{R}^d)$ a une structure d'algèbre quand on le munit de $+$ et $*$, mais sans élément neutre.

Th : Soit $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ où l'un au moins est à support compact,
alors $\begin{cases} f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d) \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq k \quad D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g \end{cases}$

Application :
Si P est un polynôme de degré m et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact alors $P*g$ est polynôme de degré au moins m.

Approximation de l'unité
déf : on appelle approximation de l'unité toute suite $(\rho_n) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :
i) $\rho_m \geq 0$
ii) $\int \rho_m = 1$
iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{m \to +\infty} \int_{\|x\| > \varepsilon} \rho_m = 0$
Si de plus $(\rho_m) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que iii) est remplacée

par la condition iii)' $Supp\, \rho_m \subset B(0, \frac{1}{m})$ on dit alors que (ρ_m) est une suite régularisante

Expl :
$\left.\begin{array}{l} \rho_m(x) = \frac{m^d}{\sqrt{\pi}^d} e^{-\|mx\|^2} \\ \rho_m(x) = \frac{m}{2} e^{-mx} \\ \rho_m(x) = \frac{m}{\pi(m^2x^2+1)} \end{array}\right\}$ sont des approximations de l'unité

Si on pose $\rho(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

alors $x \longmapsto \rho_m(x) = \frac{m^d \rho(mx)}{\int_{\mathbb{R}^d} \rho}$ est une suite régularisante

Th : **Existence des fonctions plateaux**
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, Ω un ouvert de K.
Il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que :
$\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur Ω^c et $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq \theta(x) \leq 1$

Application 1 : **Théorème de Stone Weierstrass**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Soit K un compact inclus dans Ω, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément sur K vers f.

Application 2 :
Dans ce paragraphe on supposera que (ρ_m) est une suite régularisante.

Prop :
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ alors $\rho_m * f \xrightarrow[m \to +\infty]{} f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$

Théorème :
Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < \infty$
Alors $\rho_m * f \xrightarrow[m \to +\infty]{} f$ dans $L^p(\Omega)$

Corollaire :
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

IV) TRANSFORMATION DE FOURIER

A) Cadre $L^1(\mathbb{R})$

déf: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f}$ définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi x t}\, dx$$

Expl de transformée de Fourier:

$f(x) = e^{-a|x|} \longrightarrow \hat{f}(t) = \dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$ (avec $a>0$)

$f(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x) \longrightarrow \hat{f}(t) = \dfrac{\sin(\pi a t)}{t}$

proposition:
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on suppose que f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors :
pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\widehat{f'}(t) = 2i\pi t \hat{f}(t)$

proposition:
Soit $m \in \mathbb{N}^*$, si pour tout $k \in \{0 \dots m\}$ $x \mapsto x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^m$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\frac{d^k}{dt^k}\hat{f}(t) = (-2i\pi)^k \widehat{f}(x \mapsto x^k f(x))(t)$$

application:
on retrouve la transformée de Fourier de la gaussienne
$$f(x) = e^{-ax^2} \longrightarrow \hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}t}$$
$a>0$

Formule sommatoire de Poisson
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tel $\exists M > 0$ $\exists \alpha > 0$ tel que:
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{(1+|x|)^\alpha}$
et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$
Alors $\quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

application: on obtient l'égalité modulaire pour la fonction θ_J : $\forall y > 0, \quad \theta_J(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\, \theta_J\left(\dfrac{1}{y}\right)$

Th:
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a:
$$\begin{cases} \hat{f}(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0 & \text{(lemme de Riemann-Lebesgue)} \\ \|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \end{cases}$$

Expl d'utilisation:
Prop: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, soit $a \in \mathbb{R}$ on suppose que f admet des limites à gauche et à droite de a, et des dérivées à gauche et à droite de a
on a alors
$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \hat{f}(t) e^{iat}\, dt = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2}$$

Th: Formule d'inversion de Fourier
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on suppose que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$
on peut poser $\quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt}\, dt$
Alors $\quad g = f$ presque partout

Corollaire:
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$ alors f est nulle presque partout.

Remarque: En optique, l'amplitude lumineuse de la figure de diffraction à l'infini d'un diaphragme est donnée par la transformée de Fourier (multidimensionnel) de la transmittance de ce dernier.
Par exemple dans le cas d'une fente fine de largeur a et infiniment longue, la transmittance est donnée par : $T(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x)$ et donc l'amplitude de la figure de diffraction est $\hat{T}(t) = \dfrac{\sin(\pi a t)}{t} = \pi a \,\mathrm{sinc}(\pi a t)$

B) Cadre $L^2(\mathbb{R})$

Théorème de Plancherel:
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

i) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

ii) si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f

iii) $\begin{array}{c} f \longrightarrow \hat{f} \\ L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert

iv) Soit $A > 0$, on définit
$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i2\pi x t}\, dx$
$\psi_A(t) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(t) e^{2i\pi x t}\, dt$
on a alors $\begin{cases} \|\hat{f} - \varphi_A\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \\ \|f - \psi_A\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \end{cases}$

Proposition:
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, si f est continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$ alors pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ $\widehat{f'}(t) = 2i\pi t \hat{f}(t)$

Principe d'incertitude d'Heisenberg
Proposition: Soit $f \in \mathcal{C}^1$, on suppose que : $f, xf, f' \in L^2(\mathbb{R})$. Posons

$\nabla_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$ (dispersion de l'énergie de f en temps)

$\nabla_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 |\hat{f}(t)|^2 dt$ (dispersion d'énergie en fréquence)

$E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dt$ (énergie de f)

on a alors: $\quad \nabla_f \nabla_{\hat{f}} \geqslant \dfrac{E_f}{4\pi}$

(Rappel: en mécanique quantique $\Delta p \Delta x \geqslant \dfrac{\hbar}{4\pi}$)

RÉFÉRENCES :

- Zuily - Queffélec
- Gourdon
- Chambert - Loir 1 } exemples
- Arnaudiès - Fraysse
- Dym Mc Kean
- Rouvière
- Rudin
- G. Agrey

<u>Remarque</u> : Possibilité de rajouter des probas.