236 - ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES METHODES DE CALCUL D'INTEGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES REELLES

On se place dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue : → pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on notera indifféremment $\int_0^A f$ ou $\int_{[0,A]} f$

→ pour $f \notin L^1(\mathbb{R})$ mais $f \in L^1_{loc}(\alpha,\infty)$ on dit que f est semi intégrable sur $[\alpha,+\infty[$ si $\lim_{A\to\infty} \int_\alpha^A f(x)dx$ existe et on pose

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_\alpha^A f(x)\,dx \quad \text{[FAR]}$$

I Méthodes élémentaires pour les fct°s d'une variable réelle (où l'on sait calculer une primitive)

0) Reconnaître une primitive usuelle

Ex $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = 1$ [GOU]

1) Fractions rationnelles

→ décomposer en éléments simples pr se ramener à des intégrales du type $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ ou $\int \frac{2(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^n}$ [ΠX][GOU]

Ex $\int \frac{dt}{t^4+t^2-2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-\sqrt{2}\ \ t+\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1}$

[GOU] $= \frac{1}{6\sqrt{2}} \log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{3}\arctan t + k$ $k \in \mathbb{R}$

2) Intégration par parties

→ diminuer les degrés des dénominateurs de fractions rationnelles

Ex $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} = -\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ [ΠX]

→ faire disparaître les logarithmes [ΠX]

Ex $\int \ln t = t\ln t - t + k$ $k \in \mathbb{R}$ [?]

→ établir une relation de récurrence

Ex1 "mauvais terme" en fraction rationnelle :

$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_{n+1} + I_n)$ $I_1 = \arctan x$ [ΠX GOU]

Ex2 intégrale de Wallis [GOU]

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$ $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$ $I_{2p+1} = \frac{2^p(p\ )}{(2p+1)!}$

application : Stirling

→ relation sur une intégrale à paramètre

Ex fonction beta $B(x,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt$ $(x,y>0)$ $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$ [GOU]

→ calcul de moments en probabilité

Ex $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $Var(X) = 1$

3) Utilisation du changement de variable [ΠX, GOU]

→ polynômes en sin et cos

$\int \sin^m \cos^n$ avec m ou n impair

$m = 2p+1$ $t = \sin x$ $I = \int t^n(1-t^2)^p$

(sinon on linéarise)

→ fractions rationnelles en cos et sin

On peut toujours poser le changement de variable $t = \tan\frac{t}{2}$. Pr des calculs moins lourds :

Formule de Bioche :

- si $f(x)dx$ invariant par $x \to \pi - x$ $u = \sin x$
  $x \to -x$ $u = \cos x$
  $x \to \pi + x$ $u = \tan x$

Ex $\int \frac{dt}{\sin t} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + k$ [GOU]

$\int \frac{\sin^3 x\, dx}{1+\cos^2 x} = \cos t - 2\arctan(\cos t) + k$

→ fractions rationnelles en e^x

on pose $t = e^x$.

S'il s'agit de fractions rationnelles en ch et sh on peut poser $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ ou bien $t = \operatorname{sh} x$ $t = \operatorname{ch} x$ $t = \operatorname{th} x$ par analogie aux règles de Bioche.

Ex $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\arctan e^x + k$ [GOU]

→ intégrales abéliennes = fractions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ $(ad-bc \neq 0)$

on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Ex $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}$

ou fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$

on pose $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$

→ si $b^2-4ac>0$ $a<0$ $a>0$ autre chgt en cos ch

→ si $b^2-4ac<0$ autre chgt en sh

Ex $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2} + k$

→ calcul d'intégrale à paramètre

Ex $I_n(x) = \int_0^\infty \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$ pr $0<t\leq n$

$I_n(x) = n^x B(x,n+1) = n^x B(n+1,x)$

$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

(4) Astuces (méthodes non générales)

Ex intégrale de Dirichlet [GOU]

$I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin t)dt$ on pose $u = \frac{\pi}{2} - t$

$\int_0^{\pi/4} \log(\cos t)dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin t)dt$

$\Rightarrow I = \frac{\pi\log 2}{2} + 2I$ $I = -\frac{\pi\log 2}{2}$

Ex $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\log t}dt = \log 2$ [GOU p173]

$I = \int_0^1 F'(t)\,dt$ où $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}$

et on montre par un encadrement de la fonction sous l'intégrale que $x^2\log 2 \leq F(x) \leq x\log 2$

II Utilisation de l'analyse complexe (fonction d'une variable)

1) Utilisation du prolongement analytique [OA p.84]

Ex transformée de Fourier de la gaussienne $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\hat{f}(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$

2) Utilisation du théorème des résidus

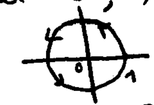
thm : soit f une application holomorphe sur $V = U \setminus \{a_1 \dots a_n\}$ avec U ouvert de $\mathbb{C}$. γ chemin continu fermé dans V tq $I(\gamma, z) = 0 \ \forall z \notin U$ on a [OA]

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} I(\gamma, a_k) \operatorname{Res}(f, a_k)$$

→ intégrales trigonométriques [AM]

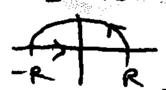
$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$ avec $R \in \mathbb{C}[X,Y]$ sans pôles sur le cercle unité

on pose $z = e^{it}$ et on intègre sur $C(0,1)$



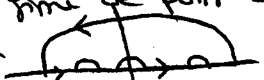
Ex $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$ $a > 1$ [AM]

→ intégrales d'une fraction rationnelle sans pôles réels : soit $R / \operatorname{Im} z R(t) = 0$

on intègre sur  et on montre que l'intégrale sur le demi cercle → 0. [AM]

Ex $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$

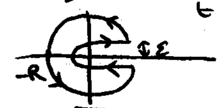
→ intégrale de Fourier : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{+itx} f(t) dt$ avec f holomorphe sur $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ sauf en un nombre fini de points :

on intègre sur 

Ex $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$

Ex $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$. LFA ou CAR

→ intégrales du type $\int_0^{\infty} \frac{R(t)}{t^\alpha} dt$ avec $0 < \alpha < 1$ et R sans pôle sur le demi axe réel $x \geq 0$ et $\lim_{t \to \infty} R(t) = 0$

on intègre sur 

Ex $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$

App formule des compléments : pour $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

3) Cas où la fonction est entière

rappel : l'intégrale d'une fonction entière sur un contour fermé est nulle.

Ex transformée de Fourier de la gaussienne $\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$ en utilisant que $\int_\Gamma e^{-\frac{z^2}{2}} = 0$ sur [DVPT]

App $H(t) = e^{-t^2}$ $H^{(m)}(t) = H_m(t) e^{-t^2}$

les $h_m(t) = (m! 2^m \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t)$ forment une famille orthonormale de vecteurs propres pour la transformée de Fourier.

III Fonctions définies par des intégrales

→ Utilisation des théorèmes de régularité

Ex $a > 0, b > 0$ [ZQ-330]

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

On montre que $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $F'(t) = -\frac{1}{t}$

1) Introduction d'un paramètre

→ pour calculer certaines intégrales on introduit un paramètre et on utilise les propriétés de régularité des intégrales à paramètre.

Ex $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ [ZQ-319]

On pose pour $t \in [1/2, +\infty[$ $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{t + x^2}$

On montre F est $\mathcal{C}^\infty([\frac{1}{2}, +\infty[)$ et $I_n = F^{(n-1)}(1) = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2 2^{2n-2}}$

Ex Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [Benoist-107]

On pose $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$

on montre que $F + G = \frac{\pi}{4}$ et $G \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Ex Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ [ZQ-317] [Benoist-107]

On pose pour $t \geq 0$ $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$

On montre que F est continue sur $[0, +\infty[$ et $t > 0$ $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$

Ex Calcul de $I = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{8} \log 2$ [Pelmer-98]

On pose $G(x) = \int_0^x \frac{\log(1+tx)}{1+t^2}$, $x \in \mathbb{R}$ et $H(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x \times \log(1+x^2)$

2) Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction

[ZQ-330]

Ex Transformée de Fourier de la gaussienne

On montre que $(\hat{f})'(t) = -t \hat{f}(t)$

3) Comportements asymptotiques

Ex Méthode de Laplace

$]a,b[\subset \mathbb{R}$ $a < b \leq +\infty$ $\varphi \in \mathcal{C}^2(]a,b[, \mathbb{R})$

$f :]a,b[\to \mathbb{C}$ tq $\bullet \ \exists t_0 \in \mathbb{R}$ $f e^{-t_0 \varphi} \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$

$\bullet \ f \ \mathcal{C}^0$ en a et $f(a) \neq 0$

1) Si $\varphi' > 0$ sur $[a,b[$ $\quad F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$

$$F(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{t\,\varphi'(a)} f(a)$$ [ROU]

2) Si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$

$$F(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\, \frac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}} f(a)$$

Application : Formule de Stirling

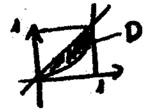
$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}$$

IV Méthodes pour les fonctions de plusieurs variables

1) Utilisation du théorème de Fubini

→ calcul d'aires [G]

Ex $\iint_D x^2\,dx\,dy = \frac{1}{20}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leq y \leq x\}$

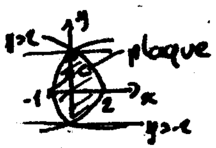


→ calculs d'intégrales liées à la physique

Ex $M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ [Delmer 98]

Les coordonnées du centre de gravité $G = (x_G, y_G, z_G)$ sont données par $x_G = \frac{1}{M} \iiint_V u\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ où $u = x, y$ ou z

Ex Plaque homogène limitée dans $\mathbb{R}^2$ par $y^2 = 4x+4$, $y^2 = -2x+4$, $|y| \leq 2$



$M = 8\rho$, $x_G = \frac{2}{5}$, $y_G = 0$

→ Transformée de Fourier de la mesure de Cauchy

Ex $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\,d\lambda(x) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Ex Calcul d'espérance $\quad X$ v.a.r positive

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,dt$$

→ Application aux intégrales d'une variable

Ex $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{4}$ [Benoist - 143]

On calcule de deux manière $\iint_{\mathbb{R}_{+*}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x)(1+xy^2)}$

Ex $I = \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{\sin(2y)}{y}\,dy = \arctan 2$

On intègre $f(x,y) = e^{-xy} \sin(2y)$ sur $[1,+\infty[\times [0,+\infty[$

2) Utilisation de changement de variable

Ex $A \in S_n^{++}$ $\quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda_1 y_1^2 - \dots - \lambda_n y_n^2}\,dy$

$$= (\det A)^{-1/2} \pi^{n/2}$$ [F]

→ Coordonnées polaires

$\varphi : (r,\theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad |J\varphi| = r$

$]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0, x \leq 0\}$

Ex $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ en calculant $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Ex $\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p-1}\,dx$ $\quad \mathrm{Re}(p) > 0$, $\mathrm{Re}(q) > 0$ [F]

$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

on retrouve $\Gamma(\frac{1}{2}) = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$

→ Coordonnées cylindriques

$\varphi : (r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ [Delmer]

Ex Volume de la fenêtre de Viviani

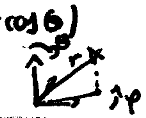
$V : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \\ x^2+y^2-ax \leq 0 \end{cases}$ $\quad \mathrm{vol}(V) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz \right) r\,dr \right) d\theta$

$$= \frac{2a^3}{9}(3\pi - 4)$$

→ Coordonnées polaires

$\varphi : (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

$r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$ $\quad \mathbb{R}^3 \setminus \{y=0, x \leq 0\}$



Ex Volume de l'ellipsoïde [Delmer]

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0\}$

$\mathrm{Vol}(E) = abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\,dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi}{3} abc$

Ex $I = \iint_D \mathrm{Arctan}(x+y)\,dx\,dy$ $\quad D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

on fait le changement de variable $x = u$, $y = v-u$ [Delmer]

et $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

3) Utilisation du théorème de Green-Riemann

$\boxed{\text{Théorème}}$ Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord C^1 et $\omega = P\,dx + Q\,dy$ une forme différentielle C^1 sur un ouvert contenant K.

Alors $\int_{\partial K^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)\,dx\,dy$

Ex $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2a < x+y < 4a,\ xy > a^2,\ x < y\}$

$\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ 2a < u < 4a,\ a^2 < v < \frac{u^2}{4}\}$

$K = \iint_D (x^2-y^2)\cos xy\,dx\,dy$ [Delmer]

on peut poser $\varphi : D \to \Delta$, $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$

ou utiliser Green-Riemann avec $\omega = (x+y)\sin xy\,(dx+dy)$

$K = 2(\cos 4a - \cos(4a^2) - 3a^2 \sin a^2)$

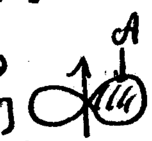
Ex Calcul d'aires

$\mathcal{A} = \iint_K dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} (x\,dy - y\,dx)$ [G]

en polaire $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2\,d\theta$

Lemniscate de Bernoulli $\quad \rho^2 = a^2\cos 2\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta = a^2$



[F]

Ex Inégalité isopérimétrique

γ courbe C^2 de longueur L, frontière de D d'aire A alors $A \leq \frac{1}{4\pi} L^2$ et égalité ssi γ cercle.

Annexes

Référence : [G] Gourdon Analyse
[M] MéthodeX Analyse } 1ère partie

[F] Farault Calcul intégral

[AM] Amar et Mathéron Analyse complexe
[Car] Cartan théorie des fonctions analytique
[LFA] Lelong-Ferrand Arnaudiès
} Pour les résidus

[OA] objectif Agreg

[Z-Q] (Devinez)
[Delmer] Francine Delmer Fonctions de plusieurs variables et intégration
[Benoist] Joël Benoist Alain Salinier Exercices du calcul d'intégral
} Calcul intégrales à paramètre

Pour partie IV plein d'eros.

[Rou] Rouvière

Autres developpements possibles :
- formule des compléments [AM]
- Calcul de l'intégrale de Fresnel [G]
- Calcul de $\frac{\sin x}{x}$ (pour un developpement asymptotique voir le document de Yves Coudène)
- Phase stationnaire [F]
- Fonction d'Airy [Z-Q ?]
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1+2\sin x}{x}\right) dx$ [G]
- Un beau calcul de résidu.

V Possible

Méthodes de calcul approché
↳ avec quelques exemples d'utilisation de ces méthodes.

↳ utilisation des suites et séries de fonctions

QUESTIONS
- calcul de la gaussienne par equa diff.
- loi de Cauchy
$f_X(t)\ \frac{1}{\pi}\ \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$
Calculer sa transfo de Fourier avec les résidus. (prendre $\alpha = 1$)
- $Y \rightsquigarrow \frac{1}{\pi}\ \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$
- $X \rightsquigarrow \frac{1}{\pi}\ \frac{\beta}{\beta^2+x^2}$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

calculer ~~E(X+Y)~~.
la fct caract de $X+Y$.
Et puis des questions de probas (Aaargh !!)