Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Prérequis : · définitions : homotopie, simple connexité
· les fonctions analytiques.

I Fonctions holomorphes

① Définition

Déf. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$
· f est holomorphe en z_0 si elle est $\mathbb{C}$ dérivable $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe
, on note $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes en tout point de U
c'est une algèbre.

Prop · f est holomorphe en $z_0 = x+iy$ ssi $d f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial y} \end{pmatrix}$
est une similitude.
d'où : f holomorphe ssi elle vérifie les conditions de Cauchy Riemann

Notation $dz = dx + i dy \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ c'est l'identité
$d\bar{z} = dx - i dy$
} c'est une 1 base

On a $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ avec $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)$
$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)$

prop : f holomorphe $\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

② Formes fermées

déf : une 1 forme différentielle est une application continue
$w : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et U ouvert.
Dans le cas $p=2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad w(x,y) = P(x,y)dx + i\,Q(x,y)dy$
$w(z) = \tilde{P}(z)dz + \tilde{Q}(z) d\bar{z}$

déf $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^p$ C^1 pm, ω une forme différentielle continue
Alors $\int_\gamma w := \int_0^1 \underbrace{w(\gamma(t))}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})} \cdot \gamma'(t)\,dt \in \mathbb{K}$

Exemples : $1\,dz : \mathbb{R}^2 \ (\simeq \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ $\quad \int_\gamma dz = \int_0^1 \gamma'(t)\,dt$
$u \longrightarrow \mathrm{Id}$
$f(z)dz : u \longmapsto f(u).\mathrm{Id}$ $\quad \int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$
$f(z)d\bar{z} : u \longmapsto f(u)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \int_\gamma f(z)d\bar{z} = \int_0^1 f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}\,dt$

déf w est exacte sur l'ouvert U si $\exists F \in C^1(U)$ telque $dF = w$
w est dite fermée si elle est localement exacte

thm Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et w une forme différentielle sur U
on a équivalence entre :
(i) w est fermée
(ii) $\int_{\partial R} w = 0$ pour tout rectangle $R \subset U$ parallèle aux axes
(iii) $\int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$ pour tout chemin γ_1 et γ_2 C^1 pm de U homotopes dans U (à extrémités libres)
(iv) $\int_\gamma w = 0$ pour tout lacet γ C^1 pm de U homotope à un point

Via (ii) :
Th Si w est une forme diff sur $U \subset \mathbb{R}^2$ alors $w = P dz + Q d\bar{z}$
w est fermée ssi $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$ (on suppose P et Q différentiables)

Application : f holomorphe $\Rightarrow f(z)dz$ fermée $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0\right)$ (thm de Cauchy)
on a l'équivalence : f différentiable et $f(z)dz$ fermée $\iff f$ holomorphe

thm Via iv : Si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$
toute forme différentielle fermée y est exacte.

Application Existence du Log comme primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur les simplements convexes. D'où existence : arg, $\sqrt{\ }$ ..

déf on définit pour γ chemin C^1 pm de $\mathbb{C}$ et $\alpha \notin \gamma([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha} dz = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\alpha} dt$

Prop : par (iii) $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)$ est invariant par homotopie dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$
$\gamma(t) = (\gamma(0) - \alpha) \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-\alpha} ds\right) + \alpha$ d'où $\mathrm{ind}_\gamma(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Application $\pi_1(S^1) = \pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$, thm de Brouwer en dim 2

formule de Cauchy (iv + indice)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$ et γ un chemin C^1 pm x homotope dans U à un point
alors $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) f(\alpha) \quad \forall \alpha \in U \setminus \mathrm{im}(\gamma)$

Conséquences U ouvert de $\mathbb{C}$

Thm f holomorphe sur U $\Leftrightarrow$ f analytique sur U

donc : f holomorphe sur U $\Rightarrow$ f C^∞ sur U

Thm de Morera : Soit f continue sur U

$f(z)dz$ fermée $\Leftrightarrow$ f holomorphe

Thm $(f_n) \in H(U)^{\mathbb{N}}$, U ouvert et $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur tout compact de U alors $f \in H(U)$

Thm : Soit $(X, \mathcal{T}, d\mu)$ un espace mesuré, U un ouvert de $\mathbb{C}$

Soit $f : U \times X \to \mathbb{C}$

Si i) $\forall z \in U$ $x \mapsto f(z,x) \in L^1(X)$

ii) il existe $N \subset X$ $\mu(N) = 0$ telque pour $x \notin N$ $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans W

iii) pour tout compact K de W il existe $g \in L^1$ telque $\forall z \in K$ $\forall x \notin N$ $|f(z,x)| \leq g(x)$. Alors la fonction $F(z) = \int_X f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe dans W et

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial F}{\partial z}(z,x)d\mu(x).$$

Ces deux derniers théorèmes permettent de construire des fonctions holomorphes : Transformée de Laplace, fonction Γ, ζ.

(3) L'apport de l'analyticité :

Prop : $f \in H(U)$, $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\} \subset U$

Alors $\exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $\forall z \in D(a,r)$ $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ $R(a_n) \geq r$

Propriétés vraies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ Thm des zéros isolés et principe du prolongement analytique

Propriétés typiques à $\mathbb{C}$ Principe du max et application ouverte

Conséquences : Lemme de Schwarz : Si $f \in H(D(0,1))$ $f(0) = 0$ et $|f| \leq 1$

Alors $|f(z)| \leq |z|$ sur $D(0,1)$ et $\exists z_0 \neq 0 \mid |f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow f = \lambda\, id$ sur D avec $|\lambda| = 1$

Application . $Aut(\mathbb{D}) = \{ z \mapsto \lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z} \mid \alpha \in D(0,1)$ et $|\lambda| = 1 \}$

II Singularités et fonctions méromorphes

(1) Singularités et séries de Laurent U ouvert de $\mathbb{C}$

def : Si $z_0 \in U$ et $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ alors f a une singularité isolée en z_0

def Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ est la série de Laurent associée à (a_n)

Elle converge en z si et seulement si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n < 0} a_n z^n$ convergent

Thm Il existe $r, R \in [0 + \infty]$ avec $0 \leq r < R \leq +\infty$ telsque :

. Si $z \notin \mathcal{C}\ell(0,r,R)$ $(= \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq R\})$ $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ou $\sum_{n < 0} a_n z^n$ diverge

. Si $z \in \mathcal{C}(0,r,R)$ alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge et la convergence est uniforme sur $C\ell(0, r+\varepsilon, R-\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$

. $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ est holomorphe sur $C(0,r,R)$

Thm : développement en série de Laurent (DSL)

Soit $0 \leq r < R \leq \infty$ et $f : C(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorphe

$\exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ $\forall z \in C(z_0, r, R)$ $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$

La couronne de la série de Laurent est $C(z_0, r', R')$ $r' \leq r$, $R' \geq R$

de plus $\forall n \in \mathbb{Z}$ $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z - z_0| = \frac{R+r}{2}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ unicité du développement

def Le coefficient a_{-1} dans le développement en série de Laurent de f est appelé le résidu de f en z_0 $a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w - z_0| = \frac{R+r}{2}} f(w)dw$

def Singularité artificielle, polaire, essentielle

$f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, $z \mapsto \sum a_n (z - z_0)^n$ le DSL de f en z_0

. Si $\forall n \in \mathbb{Z}^-$ $a_n = 0$ alors z_0 est une singularité artificielle

ex : $\frac{\sin z}{z}$

. Si $\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$ est non vide et fini alors z_0 est une singularité polaire

. Sinon z_0 est une singularité essentielle   ex $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$

Thm de Riemann Si $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ est borné au voisinage de z_0 alors la singularité est artificielle.

d'où Thm de Weierstrass : Si $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ et z_0 singularité essentielle alors pour tout $\varepsilon > 0$: $f(\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ est dense dans $\mathbb{C}$

RÉFÉRENCE : Amar - Matheron.

Conséquence : toute fonction entière injective est une similitude
Toute fonction holomorphe injective de $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans S^2 est une homographie

② Fonctions méromorphes et théorème des résidus

def : une fonction f est méromorphe sur U, s'il existe $A \subset U$ tel que A n'a pas de points d'accumulation dans U, $f \in H(U \setminus A)$ et chaque point de A est un pôle de f - on écrira $f \in M(U)$.
Ceci équivaut à f est localement le quotient de deux fonctions holomorphes

Thm des résidus
Soit f méromorphe sur U et A l'ensemble des pôles de f dans U
Soit γ un lacet dans $U \setminus A$ homotope à un point dans U
alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f,a) \operatorname{ind}_\gamma(a)$

Calculs d'intégrales
· Si $R \in \mathbb{C}(X,Y)$ sans pôle sur le cercle alors
$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = 2i\pi \sum_{\text{pôle} \in D(0,1)} \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)\right\}$ Ex pour $a>1$ $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$
· Si $R \in \mathbb{C}(X)$ sans pôle réel avec $\deg R \leq -2$ alors
$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)dt = 2i\pi \sum_{\operatorname{im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0} R$ exemple : $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n}$ $n > 1$
· Soit f une fonction méromorphe sur le demi plan $\operatorname{im} z \geq 0$ avec un nombre fini de singularités
Si $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$ pour $\operatorname{im}(z) \geq 0$ alors $\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{ix} dx = 2i\pi \sum \operatorname{Res}(f e^{iz}, z)$
Exemple $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Séries de fonctions méromorphes
Soit $(f_n) \in M(U)^{\mathbb{N}}$. $\sum f_n$ converge uniformément sur $A \subset U$, si on peut enlever un nombre fini de termes tel que les fonctions restantes n'aient pas de pôles dans A et forment une série uniformément convergente sur A.
Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de U alors la somme S est méromorphe avec $S' = \sum f_n'$ (avec convergence uniforme sur tout compact)
Ex : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ $\quad \pi \cotan \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n>0} \frac{2z}{z^2-n^2}$

· produit infini, prolongement de Γ, ζ
Thm Soit $(f_n) \in H(U)^{\mathbb{N}}$, f_n non nulle sur chaque composante connexe de U
Si $\sum |1 - f_n(z)|$ converge uniformément sur les parties compactes de U alors le produit infini $f(z) = \prod (1 + u_n(z))$ converge uniformément sur les compacts de U et définit une fonction holomorphe de U.

Exemple $\frac{\sin \pi z}{z} = \pi \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$
· La fonction Γ : $z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ définie et holomorphe sur $\operatorname{Re} z > 0$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en tous les entiers négatifs $\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}$
· La fonction ζ : $z \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en 1, de résidu 1
de plus $\forall s \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} s > 1$ $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$

③ Zeros des fonctions holomorphes

· Conséquence du théorème des zéros isolés : les zéros d'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe sont au plus dénombrables.
· Thm de Rouché
Soit γ un lacet dans U connexe homotope à un point dans U
$f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe tels que
$\forall z \in \operatorname{im}(\gamma)$ $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$
alors f et g ne s'annulent pas sur $\operatorname{im} \gamma$ et en notant $Z(f)$ = l'ensemble des zéros de f
$\sum_{a \in Z(f)} \operatorname{ind}_\gamma(a) \operatorname{ord}(f,a) = \sum_{a \in Z(g)} \operatorname{ind}_\gamma(a) \operatorname{ord}(g,a)$.
Exemple : Si U est un ouvert contenant le disque fermé $|z| \leq 1$ et si $|f(z)| < 1$ pour $|z| = 1$ alors l'équation $f(z) = z^n$ admet exactement n solutions dans $|z| < 1$ pour tout entier $n \geq 0$
Application Continuité des racines d'un polynome (vp des matrices continue / aux coef)

Thm de factorisation de Weierstrass
Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $f(0) \neq 0$, soit $z_1, z_2 \ldots$ les zéros avec multiplicités
$\exists g \in H(\mathbb{C})$ $\exists (p_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^\infty E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$
où $E_p(z) = (1-z) \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right\}$

Thm Soit U un ouvert de $S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ $U \neq S^2$
Soit $A \subset U$ sans point d'accumulation dans U
Supposons que pour tout $\alpha \in A$ on associe $m(\alpha) \in \mathbb{N}$
Il existe une fonction $f \in H(U)$ dont tous les zéros sont dans A et qui possède un zéro d'ordre $m(\alpha)$ en chaque point α de A

Thm : toute fonction méromorphe sur un ouvert du plan complexe est le quotient de deux fonctions holomorphes