+ Fejér Paul Sévry

TRANSFORMATION DE FOURIER, PRODUIT DE CONVOLUTION. APPLICATION. (239).

I le produit de convolution

PROP-DÉF
Si $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\,dy$,
et on a $u * v \in L^1(\mathbb{R})$

$*$: $L^1 \times L^1 \to L^1$ est continue :

$$\|u * v\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})} \|v\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

PROP
L^1 muni de $*$: algèbre de Banach commutative.

$*$: $L^p \times L^{p'} \to C_b$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

$*$: $C_c^0 \times C_c^0 \to C_c^0$

$\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$

Application de la convolution : régularité, approximation.

PROP
Si $f \in C_c^N$, $g \in L^1$, alors $f * g \in C^N$ et

$$\frac{d^N}{dx^N}(f * g) = \frac{d^N f}{dx^N} * g.$$

Identités approchées.

Il existe $\rho \in C^\infty$ telle que $\begin{cases} \int \rho\, dx = 1 \\ \operatorname{supp} \rho \subset \{\|x\| \leq 1\} \\ \rho \geq 0 \end{cases}$

Soit $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Régularisation, théorème de densité.

TH. Si $f \in C_c^0$, alors $f * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty$
et $f * \rho_\varepsilon \longrightarrow f$ uniformément.

- Si $g \in L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$, alors

$$g * \rho_\varepsilon \in C^\infty \cap L^p$$

et $g * \rho_\varepsilon \longrightarrow g$ dans L^p

(en utilisant le résultat d'intégration suivant : C_c^0 est dense dans L^p.)

Exemple : Noyau de Fejér $K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

Alors $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ suite régularisante.

II. Transformation de Fourier. (Rudin p 219)

DÉF :
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx$.

TH : (Riemann - Lebesgue)
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (ens. des fonctions continues nulles à l'infini) et : $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

PROP :
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et α et λ deux réels.
(a) si $g(x) = f(x)\,e^{i\alpha x}$, on a $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$
(b) si $g(x) = f(x-\lambda)$, on a $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)\,e^{-i\lambda t}$
(c) si $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ avec $\lambda \neq 0$, on a : $\hat{g}(t) = |\lambda|\,\hat{f}(\lambda t)$
(d) si $g(x) = ix f(x)$ et si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
(e) si $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{f*g}(t) = \hat{f}(t).\hat{g}(t)$

On définit l'espace de Schwartz par :
$S(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall p,q \in \mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < +\infty \}$

On a : $\forall p \geq 1$, $S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

Exple : $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in S(\mathbb{R})$ et $\hat{G} = \sqrt{2\pi}\,G$.

TH :
Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$; en particulier $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F}$ l'application linéaire $\mathcal{F} : f \in S(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

PROP :
Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f'}(t) = it\,\hat{f}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

TH (Formule d'inversion) :
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors :
ppt $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\,e^{itx}\,dt$.

Conséquences :
(i) si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$.
(ii) L'application $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est bijective et $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{f}}$, où $\check{g}(x) = g(-x)$.

Application : l'équation différentielle $u - u'' = f$ avec $f \in S(\mathbb{R})$ admet une unique solution dans $S(\mathbb{R})$.

PROP :
(1) si f et $g \in S(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\,g(t)\,dt$
(2) si f et $g \in S(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\,\overline{\hat{g}(t)}\,dt$
En particulier : $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_2$, $\forall f \in S(\mathbb{R})$.

Application : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}\,dx = 1$.

TH : Il existe un unique prolongement continu (pour la topologie de $L^2(\mathbb{R})$) de $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ en une application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Cette application est bijective et $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\check{\mathcal{F}}(f)$.
De plus : $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\mathcal{F}(f)\|_2$.

PROP :
Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)\, g = \int_{\mathbb{R}} f\, \mathcal{F}(g)$.

Corollaire :
Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

Vecteurs propres de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$:

La dérivée d'ordre n de $H(t) = e^{-t^2}$ est de la forme $e^{-t^2} H_n(t)$, où H_n est un polynôme appelé polynôme de Hermite. On définit les fonctions de Hermite par :

$$h_n(t) = (n!\, 2^n \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(t)\, e^{-t^2/2}$$

PROP :
La famille $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(e^{-x^2}dx)$ et $\hat{h}_n = \sqrt{2\pi}\, (-i)^n h_n$.

III. Applications

1. Théorie de Shannon. (Willem)

Soit $BL_2 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \}$

PROP :
(i) BL_2 est un sous-espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$.
(ii) $(\tau_k \operatorname{sinc})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL_2, où $\tau_k \operatorname{sinc}(x) = \operatorname{sinc}(x-k)$ et $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

RÉFÉRENCES :
- POMMELET
- ZUILY - QUÉFFÉLEC
- RUDIN

TH (théorème d'échantillonnage)
L'application $\begin{array}{ccc} BL^2 & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ u & \longmapsto & (u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \end{array}$ est une isométrie, et $\forall u \in BL^2$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \tau_k \operatorname{sinc}$ converge vers u uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

2. Formule sommatoire de Poisson. (Zuily-Quéffélec p93)

TH :
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que : $\exists M > 0, \exists \alpha > 1$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$; et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$.
Alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n)$.

On introduit la fonction θ de Jacobi :
$\forall t > 0$, $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$.

PROP (Propriété modulaire de θ)
$\forall t > 0$, $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, \theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Application : la fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et admettant un pôle simple en 1

Développements :
- théorème d'échantillonnage de Shannon.
- formule sommatoire de Poisson et propriété modulaire de θ.