DVPT : une f° convexe est l'intégrale d'une fonction ~~Entreprise~~ croissante   fonctions B.V. / algc. sqrg.

229 | Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et Applications.

I) Fonctions monotones.

On considère $f : I$ intervalle $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

① Définitions et premières propriétés :

Déf : • f croissante sur I ssi $\forall x, y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

• f strictement croissante sur I ssi $\forall x, y \in I$, $x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

• f décroissante sur I ssi $\forall x, y \in I$. $x<y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

• f monotone sur I ssi f croissante sur I ou f décroissante sur I

Prop = (Stabilité) : • Si f et g croissantes sur I Alors $f+g$ croissante sur I.

• Si f croissante et g croissante positive Alors $f \times g$ croissante

• Si $(f_n)_n$ croissantes converge vers f Alors f est croissante.

• Si f est croissante de signe constant et $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$. Alors $1/f$ est décroissante.

Ex : fonction de répartition d'une variable aléatoire.

② Régularité :

Prop : Soit $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ croissante où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Alors :

• $\forall x_0 \in \mathring{I}$, f admet en x_0 une limite à gauche $f(x_0^-) = \sup\{f(x), x < x_0\}$ et une limite à droite $f(x_0^+) = \inf\{f(x), x > x_0\}$ et on a : $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$

• f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b, qui ont la même expression que précédemment.

Prop : L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.

Rq : Il peut être dense : $f(x) = \sum_{r_n < x,\, r_n \in \mathbb{Q}} 2^{-n}$

Appl. Thm de Helly.

Thm : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante. Alors f continue ssi $\operatorname{Im} f$ est un intervalle

Thm : Soit f continue sur I. Alors f injective ssi f strictement monotone

Thm : f continue croissante bijective sur I. Alors f induit un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

③ Liens avec la dérivabilité.

Prop : Si f est dérivable sur I intervalle. Alors :

• f croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I

• f constante sur I ssi $f' = 0$ sur I

• f strictement croissante sur $\mathring{I}$ ssi : (i) $f' \geq 0$ sur I (ii) $\mathring{\{f'=0\}} = \emptyset$.

Rq : I doit être un intervalle : Cex : $1/x$.

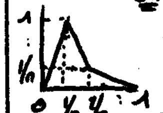
Rq : Une fonction monotone est dérivable presque partout.

Ex. : e^x, $\log$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

④ Suites de fonctions croissantes.

Thm : (Dini) : Si $(f_n)_n$ continues croissantes sur I compact qui converge simplement vers f continue. Alors la convergence est uniforme

Rq : CN : • $x \in [0,1] \mapsto x^n$: limite non continue ou limite uniforme de fonctions continues est continue.



• f_n $\mathcal{C}^0 \to f = 0$ $\mathcal{C}^0$, f_n non croissante Et cvgce non uniforme.

Thm (Helly) : Soit I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissante de I dans $\mathbb{R}$. On suppose $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ est bornée. Alors $(f_n)_n$ admet une sous-suite convergente (simplement).

Appl : Cas particulier du thm de Prokhorov. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de proba tendue sur $\mathbb{R}$

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact, $\forall n \in \mathbb{N}, p_n(K) > 1-\varepsilon$.
Alors $(p_n)_n$ a une sous suite qui converge étroitement.

⑤ Comparaison Série - Intégrale.

Prop : Soit f décroissante positive.
Alors • $\int_0^{n+1} f(t)dt$ et $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ ont même nature.
• De plus, si elles divergent, alors elles sont équivalentes.

Thm : Soit f décroissante positive.
Alors $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(t)dt$ converge dans $\mathbb{R}^+$

Appl : Avec $f : x \mapsto 1/x+1$, on obtient l'existence de $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$

II) Fonctions convexes.

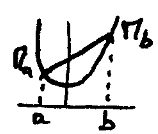
On considère $f : C$ convexe de $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$.

① Définitions et Stabilité :

Déf : • f convexe ssi $\forall x,y \in C, \forall t \in]0,1[$,
$f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$.
• f strict^{t} convexe ssi l'inégalité est stricte.
• f concave ssi $-f$ convexe.

Prop : f convexe ssi $Epi(f)$ convexe.

Rq : Interprétation géométrique :
La courbe située entre $x=a$ et $x=b$ est sous la corde $[M_a, M_b]$



Rq : Une fonction convexe et concave est affine.

Ex : • fonctions affines. • $x \mapsto x^2$
• $f_n = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle, A \in S_n(\mathbb{R})$ • $\|\cdot\|$

Prop : • Les fonctions convexes sont stables par combinaisons linéaires à coefficients positifs mais pas par produit : (cf x^2 et x)
• Si f convexe, et g convexe croissante
Alors $g \circ f$ est convexe.
Rq : g croissante nécessaire : (cf $f = x^2, g = -x$)
$f \circ g$ non convexe : (ex sur $\mathbb{R}^+$: $f = -x, g = x^2$)
• Les fonctions convexes sont stables par passage au sup.

② Caractérisation des fonctions convexes.

Thm : Si $d=1$, Alors f convexe ssi $\forall a \in C$
$x \mapsto p_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante

Cor : Si $d=1$; Inégalité des 3 pentes : f convexe ssi $\forall a,b,c, a<b<c$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Cor : Si $d=1$: • Si f est dérivable,
Alors f convexe ssi f' croissante
• Si f est 2 fois dérivable,
Alors f convexe ssi $f'' \geq 0$

Thm : (Généralisation) : Soit f 2 fois différentiable
Alors : • f est convexe sur C ouvert ssi $\forall x \in C, D^2 f(x)$ est positive
ie $\forall x \in C, \forall v \in \mathbb{R}^d, D^2 f(x)(v,v) \geq 0$
• Si $\forall x \in C, D^2 f(x)$ est définie positive
ie $\forall x \in C, \forall v \in \mathbb{R}^d, D^2 f(x)(v,v) > 0$
Alors f est strictement convexe sur C

Rq : f convexe ssi son graphe est au dessus de tout hyperplan tangent à la courbe

Ex : • $\exp, -\ln, x \mapsto x^2, |x|$
• $-\sin_{|[0,\pi/2]} \Rightarrow \forall x \in [0,\pi/2], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$
• $x \in \mathbb{R}^d \mapsto |x|^\alpha, \alpha \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^d \mapsto e^{\beta x}, \beta \in \mathbb{R}$
• $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

Ex : Soit $A \in S_d(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$
Alors f convexe ssi $A \geq 0$ ie $\forall x, \langle Ax, x\rangle \geq 0$
et f st^{t} convexe ssi $A > 0$ ie $\forall x, \langle Ax, x\rangle > 0$

Appl : Méthode du gradient.

③ Régularité :

Cor : Soit $f : C \to \mathbb{R}$. Alors :
• f admet en tout point de $\mathring{C}$ des dérivées dans toutes les directions.
• f continue sur $\mathring{C}$
• f est lipschitz sur les compacts.

Prop : Si f est continue sur $\mathring{C}$
Alors f convexe ssi $\forall x,y$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

④ <u>Fonctions convexes et minimas.</u>

Thm : Soit $f : C \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe.
(i) : Si f possède un minimum local en $\alpha \in \mathring{C}$, alors il est global
(ii) Si f possède 2 minima aux points α et β de C, alors ces 2 valeurs sont égales et f est constante sur $[\alpha, \beta]$

Rq : Si f est strictement convexe, le point où est atteint le minimum est unique.

John

Cor : Si f est strictement convexe et si $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Alors f admet un minimum qui est atteint en un unique point.

⑤ <u>Monotonie et limites dans le cas réel.</u>

Prop : Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Alors :
f est monotone <u>ou</u> f décroissante puis croissante.

Prop (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ majorée convexe
Alors f est constante
(ii). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe croissante non constante. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Rq : (i) faux si $f : I \neq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ex : $x \mapsto 1/x+1$

Appl : Equa Diff : $y'' + q(t)y = 0$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^-$ continue
Comme y^2 est convexe (si y est solution)
On a : (i) La seule solution bornée est 0
(ii) : Une solution non-nulle s'annule au plus une fois.

III] <u>Inégalités de convexité et Applications.</u>

① <u>Inégalité de Jensen discret</u>

Thm : Soit $f : C \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe.
Soit $\alpha_1, \dots \alpha_n \in [0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
Soit $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}^d$
Alors $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

②: <u>Comparaisons de moyennes.</u>

Def : Soit $a_1, \dots, a_n > 0$. On définit :
- moyenne arithmétique : $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_k$
- moyenne géométrique : $G = \left(\prod_{i=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$
- moyenne harmonique : $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$

Cor : $H \leq G \leq A$.

③ <u>Inégalité de Jensen</u> :

Prop : $f \in L^1(X,\mu)$ où μ mesure de proba.
$\varphi : X \to \mathbb{R}$ convexe tq $\varphi \circ f \in L^1(X,\mu)$.
Alors : $\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f \, d\mu$.

④ : <u>Inégalité de Young.</u>

Prop : Soit $x, y > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$.
Alors $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ avec égalité ssi $x = y$.

⑤ : <u>Inégalité de Hölder.</u>

Thm : Soit f, g positives réelles. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$
Soit μ une mesure positive.
Alors $\left(\int fg \, d\mu\right) \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$
Avec égalité ssi $\exists (\alpha,\beta) \neq (0,0)$ tq $\alpha f^p = \beta g^q$ μpp

⑥ <u>Inégalité de Minkowski</u>

Def : $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$.

Thm : Soit f, g mesurables, μ mesure positive
Alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$
Avec égalité ssi f et g sont positivement liées.

Cor : $\|.\|_p$ est une norme pour $L^p(\mu)$
(et une semi norme pour $\mathcal{L}^p(\mu)$)

---

ref : Gourdon : Maths en tête.
Pommelet : Analyse.
513. Hirriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe
Lacombe. Massat : Analyse fonctionnelle (exo).
Zuilly-Queffelec.

John