PROBLEMES D'EXTREMA

On suppose acquises les notions de minimum, maximum, et d'extrema local et global.

I) Existence et unicité (E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé)

1) Compacité

Th 1: Soit K un compact de E et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Applications 1: ① En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

② Si $\forall x, y \in K$, $|f(x) - f(y)| < \|x - y\|$, alors f admet un unique point fixe.

③ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Si C est un fermé de E et si f est coercive, alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

2) Convexité

Th 2: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé non vide de E. Et soit $x \in E$. Alors :

i) il existe un unique $y \in C$ tel que $\|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|$, y est le projeté de x sur C.

ii) y est caractérisé par : $\forall z \in C$, $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$

Corollaire 1: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace fermé de E. Pour $x \in E$, le projeté y de x sur F est l'unique élément qui vérifie $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$. y est caractérisé par : $\forall z \in F$, $\langle y - x, z \rangle = 0$

Application 2: espérance conditionnelle dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Le sous-espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors, la projection orthogonale $\mathbb{E}(Y/\mathcal{B})$ de $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est caractérisée par la relation : $\forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, $\mathbb{E}(ZY) = \mathbb{E}(Z\,\mathbb{E}(Y/\mathcal{B}))$.

Th 3: Soit C un convexe non vide de E et $f : C \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe sur C (i.e. $\forall x, y \in C$, $\forall t \in (0,1)$, $f(tx + (1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y)$).

Alors il existe au plus un point $\bar{x} \in C$ minimisant f sur C.

Application 3: Théorème de l'ellipsoïde de John-Loewner

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur. Alors K est contenu dans un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal parmi les ellipsoïdes centrés en 0.

II) Localisation des extrema (On se place sur $E = \mathbb{R}^m$)

1) Sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$

Th 4 : Condition du premier ordre

Si $\bar{x}$ est un extremum local de $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^m$, et si f est différentiable en $\bar{x}$, alors $df(\bar{x}) = 0$.

$\bar{x}$ est appelé point critique.

Ex 2 : · Cette condition n'est pas suffisante car l'application $t \in \mathbb{R} \to t^3$ a sa dérivée qui s'annule en 0 et 0 n'est pas un minimum.

· Ceci est faux si U n'est pas ouvert comme le montre l'application $f : t \in [0,1) \to t$ (0 est un minimum local et $f'(0) = 1 \neq 0$).

Application 4 : Théorème de Rolle.

Application 5 : Point de Fermat

Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On suppose les trois angles du triangle ABC strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. On considère la fonction $f(M) = MA + MB + MC$.

Alors f atteint son minimum en au moins un point P, distinct de A, B et C.

De plus, $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$, P est unique et f admet en P un minimum global strict.

Th 5 : Conditions du second ordre

Soit $\bar{x} \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $\bar{x}$. Si $df(\bar{x}) = 0$, alors : i) si $\bar{x}$ est un minimum local de f, $d^2f(\bar{x})$ est positive.

ii) si $d^2f(\bar{x})$ est définie positive, $\bar{x}$ est un minimum local strict.

Ex 3 : · $f(x,y) = x^2 - y^3$

le seul point critique est $(0,0)$ et $d^2f(0,0)$ est positive. Par contre $(0,0)$ n'est pas un minimum local

· $f(x,y) = x^2 + y^4$

f admet un minimum local strict en $(0,0)$ (même global) mais f ne vérifie pas le ii) du Th 5.

Application 6 : principe du maximum

Soit U ouvert borné de $\mathbb{R}^m$ et on considère l'opérateur laplacien :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

alors, si U est connexe et si u est une fonction réelle continue sur $\bar{U}$ et $\mathcal{C}^2$ sur U telle que $\Delta u(x) \geq 0$ $\forall x \in U$ et u atteint son maximum en un point de U, alors u est constant sur U.

Conséquence : principe du maximum pour les fonctions holomorphes.

Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe sur U. Si $|f|$ (ou $\mathrm{Re}\, f$ ou $\mathrm{Im}\, f$) atteint son maximum en un point de U, f est constante dans U.

2) Sur un convexe

Th 6 : inégalité d'Euler.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit C un convexe inclus dans U. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$. Si f admet un minimum local en $\bar{x} \in C$ et si f est différentiable en $\bar{x}$, alors :
$$df(\bar{x}).(y-\bar{x}) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Application 7 : On retrouve la caractérisation du projeté sur un convexe fermé, pour E un Hilbert, en appliquant le Th 6 à la fonction $f(y) = \frac{1}{2}\|y-x\|^2$ pour $x \in E$ et C convexe fermé de E.

Proposition 1 : Soit f une fonction convexe sur un ouvert convexe C de $\mathbb{R}^n$. Supposons f différentiable en $a \in C$, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$
Alors : $df(a) = 0 \iff f$ admet un minimum global.

3) Sur une variété

On considère $V = \{x \in \mathbb{R}^n, g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$ où les $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Th 7 : extrema liés
Soit U un ouvert de E contenant V et $f : U \to \mathbb{R}$. Si $\bar{x}$ est un extremum local de f dans V, si f est différentiable en $\bar{x}$ et si les différentielles $dg_1(\bar{x}), \dots, dg_m(\bar{x})$ sont linéairement indépendantes, alors il existe un unique m-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que $df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dg_i(\bar{x})$.

Application 8 : ① diagonalisation des endomorphismes symétriques.
② $SO(n)$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme $\|\cdot\|_2$ minimale (avec $\|M\|_2^2 = \mathrm{Tr}({}^tMM)$).

III) Approximation des extrema..., optimisation sans contrainte

On cherche à construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{x}$ solution de $\inf\{f(x), x \in \mathbb{R}^n\}$.
On construit x_{n+1} en choisissant une direction de descente d_n et un pas t_n tel que $x_{n+1} = x_n + t_n d_n$.

1) Méthode du gradient à pas optimal

On choisit $d_n = -\nabla f(x_n)$ et t_n tel que $f(x_n + t_n d_n) = \min_{t \in \mathbb{R}} f(x_n + t d_n)$

Th 8 : Si f est elliptique (si f est $\mathcal{C}^1$ et $\exists \alpha > 0$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(v) - \nabla f(u), v-u \rangle \geq \alpha \|v-u\|^2$), alors la méthode de gradient à pas optimal converge

2) Méthode de Newton

On choisit $d_n = (d^2 f(x_n))^{-1} \nabla f(x_n)$ (sous réserve d'existence) et $t_n = 1$.

Th 9 : Si f est $\mathcal{C}^3$, alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(\bar{x}, r)$, la méthode de Newton converge. De plus, la convergence est quadratique i.e. $\exists M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+1} - \bar{x}\| \leq M \|x_n - \bar{x}\|^2$.

Références : · pour le I) : · Objectif Agrégation, Beck, Malick, Peyré.

→ Application 2 : Probabilités 2, Master Agrégation J.P. Ouvrard.

→ Application 3 : Allesandri, thèmes de géométrie.

· pour le II) : · Objectif Agrégation, Beck, Malick, Peyré.

→ Application 5 : Petit guide du calcul différentiel, F. Rouvière

→ Application 6 : Éléments d'analyse pour l'agrégation, Zuily Queffélec

· pour le III) : · Objectif Agrégation, Beck, Malick, Peyré.

Autre dire : extr. liés

Inégalité de Hadamard.

$f : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$.

f atteint son maxi en :

$(v_1, \dots, v_n) \in S = \{(v_1, \dots, v_n) \mid \|v_i\| = 1 \ \forall i\}$

$\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ est une base ortho. de $\mathbb{R}^n$.

Ceci implique :

$\det(v_1, \dots, v_n) \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$