REF : Lacombe / Demailly / OA / Brézis / Willem

Leçon [illegible]3 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Propriétés élémentaires.

Déf 1 : Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, H est dit préhilbertien si il est muni d'un produit scalaire noté $\langle . | . \rangle$.

Prop 2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

- $\forall x, y \in H \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité ssi x et y sont liés.
- $\|.\| : H \ni x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur H.

Déf 2 : $(H, \langle . | . \rangle)$ est un espace de Hilbert si il est complet pour la norme $\|.\|$.

Exemples :
- $\mathbb{K}^n$ muni d'un produit scalaire.
- $\mathbb{L}^2(X)$ où $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré muni du produit scalaire.

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} \, d\mu(x) \qquad \forall f, g \in \mathbb{L}^2(X).$$

En particulier, on a $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites de carré sommable.

Prop 3 : Identité du parallélogramme :

Soient $x, y \in H$, on a alors : $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Prop 4 : Théorème de Pythagore. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de H deux à deux orthogonaux, alors on a $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

II. Théorème de projection.

Thm 5 : Soient $(H, \langle . | . \rangle)$ un espace de Hilbert, C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de C noté $P_C(x)$ tel que

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\| \qquad \forall y \in C.$$

De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par $\quad P_C(x) \in C$ et $\mathrm{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$.

Application 1 : Hahn-Banach géométrique : Soient $(H, \langle . | . \rangle)$ un espace de Hilbert réel et A un convexe fermé, B un convexe compact disjoints. Alors il existe $f \in H'$ tel que $\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$

rq : $P_C : x \mapsto P_C(x)$ est bien définie et 1-lipschitzienne.

Thm 6 : Soient $(H, \langle . | . \rangle)$ un espace de Hilbert et F un s.e.v fermé de H. Pour $x \in H$, le projeté $P_F(x)$ de x sur F est l'unique élément de H qui vérifie $\quad p \in F \quad$ et $\quad x - p \in F^\perp$

De plus, $P_F : H \to F$ est linéaire continue surjective et c'est le projecteur associé à la décomposition $H = F \oplus F^\perp$

Corollaire 7 : Sous ces hypothèses, si F est un s.e.v de H, on a :

$$\overline{F} = F^{\perp\perp} \quad \text{d'où} \quad \overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}.$$

Application 2 : Espérance conditionnelle.

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un s.e.v fermé de $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ il existe un unique élément de $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ noté $\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$ tel que

$$\forall g \in \mathbb{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu) \qquad \mathbb{E}[gf] = \mathbb{E}[g \, \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]]$$

III. Théorème de Riesz.

Thm 8 : Soit $(H, \langle . | . \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors l'application

$$\Phi : \begin{array}{l} H \longrightarrow H' \\ y \longmapsto (x \mapsto \langle x | y \rangle) \end{array}$$

est une isométrie semi-linéaire surjective de H dans son dual H'.

Application 3 : Adjoint. Soit $u \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $v \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall x, y \in H \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle.$$

v est appelé l'adjoint de u noté u^*. De plus, on a $\|u^*\| = \|u\|$.

Théorème 10 : Radon-Nikodym.

Soient $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, ν et μ deux mesures positives finies telles que $\nu \ll \mu$: ie $\forall A \in \mathcal{A}$ $(\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0)$.
Alors il existe $h \in \mathbb{L}^1(\Omega,\mu)$ telle que ν soit une mesure de densité h par rapport à μ : $\forall A \in \mathcal{A}$ $\int_A d\nu = \int_A h\,d\mu$.

Application 4 : Espérance conditionnelle.

$(X,\mathcal{A},\mu)$ probabilisé et $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ deux tribus. Alors pour tout $f \in \mathbb{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$, il existe un unique élément $g \in \mathbb{L}^1(X,\mathcal{G},\mu)$ noté $\mathbb{E}[f|\mathcal{G}]$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{G} \qquad \mathbb{E}[f\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A].$$

Application 5 : Dualité dans les $\mathbb{L}^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$.

Soit $1 \leq p \leq 2$. L'application $\begin{array}{l} \mathbb{L}^q \longrightarrow (\mathbb{L}^p)' \\ g \longmapsto L_g \end{array}$ où $L_g : f \mapsto \int_0^1 fg\,d\lambda$ est une isométrie linéaire surjective.

Application 6 : Hahn-Banach analytique.

Soient F un s.e.v de H et $f \in F'$. Alors, il existe $\bar{f} \in H'$ tq $\bar{f}_{|F} = f$ et $\|f\|_{F'} = \|\bar{f}\|_{H'}$.

IV. Bases hilbertiennes

Déf 11 : Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est :
- (i) orthogonale : $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ $i,j \in I$
- (ii) normée : $\langle e_i | e_i \rangle = 1$ pour $i \in I$.
- (iii) totale : $H = \overline{\text{vect}(e_i\,;\,i\in I)}$

Prop 12 : Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

rq : on utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Thm 13 : Soient H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne
- (ii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x | e_n \rangle e_n$.
- (iii) $\forall x \in H$ $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2$ (identité de Parseval)
- (iv) $(e_n : n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$.

Dans ce cas, l'application $\Delta : \begin{cases} H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$ est bien définie et réalise une isométrie surjective de H sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exemples :

Prop 14 : On pose $B^2(\mathbb{D}) = \mathbb{L}^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{D})$.
- la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.
- On pose $h(\xi, z) = \frac{1}{\pi(1-\bar{\xi}z)^2}$ sur $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$

Alors $\forall z \in \mathbb{D}$, $h(\xi,\cdot) \in B^2(\mathbb{D})$ et $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$ $f(\xi) = \int_{\mathbb{D}} h(\xi,z) f(z)\,dz$

Prop 15 : On pose $BL^2 = \{u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) : \text{Supp}\,\hat{u} \subset [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$
$\text{sinc} : x \mapsto \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ $\tau_k \text{sinc} = \text{sinc}(\cdot - k)$ $k \in \mathbb{Z}$.
Alors BL^2 est un Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_2$ et $(\tau_k \text{sinc})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne. De plus, pour tout $u \in BL^2$

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\,\text{sinc}(x-k)$$ converge en norme $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

V - Applications

a) polynômes orthogonaux I intervalle de $\mathbb{R}$

- **Déf 16:** $w : I \to]0,+\infty[$ est une fonction poids si elle est mesurable et si : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n w(x)dx < +\infty$

Rq : c'est le cas si I est borné et $\int_I w(x)dx < +\infty$.

On note $L^2(I,w)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue sur I, muni du produit scalaire :

$$\langle f,g\rangle_w = \int_I f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$, c'est un espace de Hilbert

- **Prop 17:** Il existe une unique famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux, tels que $\deg(P_n)=n$. On la nomme famille des polynômes orthogonaux pour le poids w.

Ex : - polynômes de Laguerre : $I =]0,+\infty[$, $w(x) = e^{-x}$
- polynômes de Hermite : $I = \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$
- polynômes de Legendre : $I =]-1,1[$, $w(x) = 1$

Application 7: projection orthogonale sur $\mathbb{R}_N[X]$ de $f \in L^2(I,w)$

$$p_N(f) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f, P_n\rangle_w}{\|P_n\|_w^2} P_n$$

- **Th 18:** s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} w(x)dx < +\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux pour le poids w forme une base hilbertienne de $L^2(I,w)$

Application 8: base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ $w(x) = e^{-x^2}$

$L^2(\mathbb{R},w) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$, $f \longmapsto f\sqrt{w}$ est une isométrie surjective, d'inverse $g \longmapsto g/\sqrt{w}$

Ainsi, $\left(P_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)_{n\geq 0}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, où les $(P_n)_{n\geq 0}$ sont les polynômes de Hermite.

De même, les polynômes de Laguerre fournissent une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

- **Application 9:** méthode de Gauss ; $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$

On étudie les méthode d'intégration numérique du types

$$\int_\alpha^\beta f(x)w(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j) \ , \ x_j \in [\alpha,\beta]$$

w désigne une fonction poids continue sur $]\alpha,\beta[$ et f ~~une~~ fonction continue sur $[\alpha,\beta]$.

Prop 19: le n^{e} polynôme orthogonal pour le poids w possède n racines distinctes dans $]\alpha,\beta[$

Th 20: Il existe un unique choix des λ_j, x_j de sorte que la méthode soit d'ordre $2\ell+1$. Les x_j sont alors les racines du $(\ell+1)^{e}$ polynôme orthogonal

b) Séries de Fourier $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \longmapsto e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$

$L^2(\mathbb{T})$ est muni du produit scalaire : $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$

Th 21: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$

Ainsi pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_2} f$

$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$ désigne le n^{e} coefficient de Fourier de f.

Contre-exemple : il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en 0.

Cor 22: $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

Application 10: $f : x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,\pi]$

$c_0(f) = \frac{2}{3}$ et $|c_n(f)| = \frac{2}{n^2\pi^2}$ si $n \neq 0$

donc $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{4}{9} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$

$\|f\|_2^2 = \frac{8}{15}$, donc on obtient $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$