201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

I Espaces d'applications linéaires.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Def : On note $\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F,\ f$ linéaire continue$\}$

Prop : Si F est un Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ l'est pour la norme d'opérateur.

Prop : Soit $T \in \mathcal{L}(E,E)$ avec E un Banach.
Si $\|T\| < 1$, alors $Id - T \in \mathcal{L}(E,E)$ est inversible et d'inverse $\sum_{n \geq 0} T^n$.

Application : Ce résultat permet de montrer que l'ensemble des inversibles de $\mathcal{L}(E,E)$ est ouvert.

Thm : (Banach-Steinhaus) : On suppose E complet.
Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$.
Si $\forall x \in E$, $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$, alors $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Application :
Thm : Il existe des fonctions continues, dont la série de Fourier diverge en un point.

II Espaces de fonctions continues

Soit (X,d) un espace métrique et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{F}_b(X) := \{f : X \to \mathbb{K}$ bornées$\}$ et
$\mathcal{C}_b^0(X) := \{f : X \to \mathbb{K}$ continues et bornées$\}$.

(A) Autour de la complétude.

Thm : $(\mathcal{F}_b(X), \|\cdot\|_{sup})$ est complet
$\mathcal{C}_b^0(X)$ est fermé dans $(\mathcal{F}_b(X), \|\cdot\|_{sup})$.

Corollaire : Si X est compact, $(\mathcal{C}^0(X), \|\cdot\|_{sup})$ est complet (où $\mathcal{C}^0(X) = \{f : X \to \mathbb{K}$ continues$\}$)

Thm (de Tietze) : Soit Y un fermé de X et $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ continue. Alors g_0 admet un prolongement continu $f_0 : X \to \mathbb{R}$.

Thm (du point fixe) : On suppose (X,d) complet. $\boxed{\text{DVT}}$
Soit $\varphi : X \to X$ contractante (ie : k-lipschitzienne avec $k<1$)
Alors φ admet un unique point fixe $x_0 \in X$.

Application : Thm (de Cauchy-Lipschitz) :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, $\forall (t_0, y_0) \in U$, le système $y' = f(t,y)$ et $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution maximale.

(B) Résultats de densité et applications.

Thm (Stone-Weierstrass) : Soit X compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X)$ vérifiant :
(i) A sépare les points : $\forall x \neq y \in X$, $\exists f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$
(ii) A contient les fonctions constantes.
(iii) $\forall f \in A$, $\bar{f} \in A$ (où $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$, $\forall z \in X$)
Alors : A est dense dans $(\mathcal{C}^0(X), \|\cdot\|_{sup})$.

Exemple : L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{K}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0(X))$.

Def : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit : pour $k \in \mathbb{N}$
$\mathcal{C}^k_{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$, k-fois continûment dérivable$\}$
et $\mathcal{C}^\infty_{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}\}$

Rmq : $\forall k \leq l$, on a : $\mathcal{C}^\infty_{[a,b]} \subset \mathcal{C}^l_{[a,b]} \subset \mathcal{C}^k_{[a,b]} \subset \mathcal{C}^0_{[a,b]}$

Conséquence : Comme les polynômes sont dans $\mathcal{C}^\infty_{[a,b]}$, $\mathcal{C}^k_{[a,b]}$ est dense dans $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$ pour tout $1 \leq k \leq \infty$.

Prop : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{C}^k_{[a,b]}, \|\cdot\|)$ est complet, où $\|\cdot\|$ est définie par : $\forall f \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}$, $\|f\|_{\mathcal{C}^k} = |f(a)| + |f'(a)| + \dots + |f^{(k-1)}(a)| + \|f^{(k)}\|_{sup}$

Thm (Généralisation de Stone-Weierstrass)

Soit $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \}$.

Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ vérifiant :

(i) A sépare les points (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists f \in A \mid f(x) \neq 0 \}$

(iii) $\forall f \in A$, $\bar{f} \in A$.

Alors $\overline{A} = \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$. (DVT)

Rmq: Ce résultat se montre à l'aide du compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$.

© Caractérisation des compacts de $\mathcal{C}^0(X)$

Thm (d'Ascoli) : Soit A une partie de $\mathcal{C}^0(X)$ avec X compact. On a :

A est relativement compact ssi A est borné et équicontinu

Application : **Thm** (de Cauchy-Peano)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue.

Alors $\forall (t_0, y_0) \in U$, le système $y' = f(t, y)$ et $y(t_0) = y_0$ admet une solution sur $I \ni t_0$.

III Espaces de fonctions intégrables

X ouvert

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $X \subset \mathbb{R}^d$, μ de Borel.

Def: $\forall p \in [1, \infty[$, $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \}$

$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R}$ bornée sur ${}^cA$ tel que $\mu({}^cA) = 0 \}$

Prop: $\|\cdot\|_p : f \longmapsto \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ et $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \inf \{ y \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } |f| \leq y \ \mu\text{-pp} \}$ sont des semi-normes sur $\mathcal{L}^p$.

Def + Prop : $\mathcal{L}^p_{(X,\mu)} / \sim = L^p(X, \mu)$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un espace vectoriel normé où $\sim$ est défini par :

$f \sim g \iff f = g$ μ-pp.

Le résultat sur la complétude : (DVT)

Thm (Riesz-Fischer) : $\forall p \in [1, \infty]$,

$L^p(X, \mu)$ est complet.

Ⓐ Résultats de densité

Thm : $\forall p \in [1, \infty]$, l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(X, \mu)$.

Thm : $\forall p \in [1, \infty[$, $\mathcal{C}_c^0(X)$ est dense dans $L^p(X, \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur X.

Cor : $\forall p \in [1, +\infty[$, $L^p(X, \lambda)$ est séparable.

Rmq : $L^\infty(X, \lambda)$ n'est pas séparable.

Notations : $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{C}_c^k$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^k$ à support compact.

Ⓑ Régularisation par convolution et ~~série~~ transformée de Fourier

Def : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$. On définit la convolée de f et g par : $f * g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$ pour presque tout x.

Thm : $(L^1(\mathbb{R}^d, \lambda), +, *, \cdot)$ est une algèbre non unitaire.

Rmq : $*$ n'admet pas d'élément neutre dans $L^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$. On utilisera, à la place, les suites d'approximation de l'unité.

Thm : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ $\forall p \in [1, \infty[$

Transformée de Fourier L^1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$. On note $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} f(x)\,dx$ la transformée de Fourier de f.

Lemme de Riemann-Lebesgue : $\hat{f} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$

Prop : (Conséquence de Stone-Weierstrass généralisé)
$A = \{\hat{f} \mid f \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{DVT}}$

Prop : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a : $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

IV Espaces de Hilbert

(A) $L^2(X, \lambda)$

Soit $X = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Thm : Les polynômes trigonométriques forment une base hilbertienne de $L^2(X, \lambda)$

Application : Séries de Fourier

En conséquence de la structure de Hilbert conférée à $L^2(X,\lambda)$ on a le théorème suivant : ($\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne)

Thm :
(a) Soit $f \in L^2(X)$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_X |f(t)|^2\,dt$
(b) $f = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int}$ dans $L^2(X)$
(c) $\forall \{a_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tq $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$, $\exists! f \in L^2(X)$ tq $a_n = \hat{f}(n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
(d) $\forall f, g \in L^2(X)$, $\frac{1}{2\pi}\int_X f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ (Parseval)

(B) Transformée de Fourier L^2

La transformée de Fourier est continue sur $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$. Comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on a :

$\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $f \mapsto \hat{f}$ se prolonge en : $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ et le :

Thm (Plancherel) : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$$ (On retrouve Parseval)

(C) Lemme de Lax-Milgram

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un Espace de Hilbert.

Thm (de représentation de Riesz)
Soit ϕ une application linéaire continue sur E. Alors il existe un unique $y \in E$ tq : $\forall x \in E$, $\phi(x) = (x|y)$. De plus, $\|\phi\| = \|y\|$.

Thm (Lemme de Lax-Milgram)
On suppose de plus E de Hilbert réel.
Soit a une forme bilinéaire sur E continue et coercive (i.e. : $\exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in E$, $a(x,x) \geq \alpha \|x^2\|$).
On se donne une forme linéaire continue ϕ sur E.
Alors $\exists! x \in E$ tq $\forall y \in E$, $a(x,y) = \phi(y)$.
De plus, l'application (linéaire) $\phi \mapsto x$ est continue de E' dans E (où E' désigne le dual de E).

Bibliographie :

I : Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.

et Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis (p.51)

pour l'application de Banach-Steinhaus

II : L. Schwartz, Topologie et analyse fonctionnelle T. 2 → début partie II

Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrégation

↳ Tietze,

Demailly, Analyse numérique et équations différentielles

↳ Point fixe, Cauchy-Peano

Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

↳ Cauchy-Lipschitz

Hirsch-Lacombe (cf I) → Stone-Weierstrass

Gonnord-Tosel : Topologie et analyse fonctionnelle → Ascoli → Stone-Weierstrass généralisé.

III : Briane-Pagès : Théorie de l'intégration

Rudin : Complex and real analysis

Y. Katznelson

IV : Hirsch-Lacombe → Thm de représentation de Riesz

Raviart-Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles → dem de Lax-Milgram

Y. Katznelson → séries de Fourier L^2 (p.37)
transformée de Fourier L^2.