Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

I) Généralités.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, on considère les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ vérifiant :

(E) $y' = A \cdot y + B$ (équation différentielle linéaire)

(E_H) $y' = A \cdot y$ (équation homogène)

1) Théorème de Cauchy - Lipschitz linéaire

Th : Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution à E telle que $y(t_0) = y_0$.

Application : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent $\Rightarrow$ $e^{A+B} = e^A e^B$.

2) Structure de l'ensemble des solutions.

On appelle S (resp. S_H) l'ensemble des solutions de (E) (resp. de E_H).

- S_H est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- S est un $\mathbb{K}$-espace affine dirigé par S_H.

Si $t_0 \in I$, $\phi_{t_0} : S_H \longrightarrow E$ est un isomorphisme
$y \mapsto y(t_0)$

Corollaire : Pour $y_1, \dots, y_p \in S_H$, on a l'équivalence :

(i) $(y_1, \dots, y_p)$ est libre dans S_H

(ii) $\exists\, t_0 \in \mathbb{K}$, $(y_1(t_0), \dots, y_p(t_0))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$

(iii) $\forall\, t_0 \in \mathbb{K}$, $(y_1(t_0), \dots, y_p(t_0))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$

Application : Caractérisation des sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translation.

3) Méthode de variation des constantes.

Définition : On appelle système fondamental de solutions une base $(y_1, \dots, y_n)$ de S_H.

On cherche une solution de (E) sous la forme : $y(t) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i(t)\, y_i(t)$. On a :

$$\Lambda'(t) = (y_1 \ \cdots \ y_n)^{-1}(t) \cdot B(t),\ t \in I.$$

avec $\Lambda(t) = {}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(t)$.

Exemple : $y' + y = \sin$ mène à $y(t) = \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2} + \mu e^{-t}$

II) Systèmes différentiels à coefficients constants : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Equation homogène.

Théorème : $y : t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0$ est l'unique solution de (E) telle que $y(t_0) = y_0$.

Application : Si $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{K})$ est un morphisme continu, $f(t) = e^{tA}$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition : On écrit χ_A, le polynôme caractéristique de A sous la forme :

$$\chi_A = (-1)^d \prod_{j=1}^{d} (X - \lambda_j)^{m_j} \text{ (sur } \mathbb{C}).$$

Pour tout m_j, il existe m_j solutions indépendantes de la forme :

$$x_{j,k}(t) = e^{\lambda_j t} P_{j,k}(t) \quad k \in [\![1, m_j]\!]$$

où $P_{j,k} \in \mathbb{C}^d_{k-1}[X]$.

Corollaire : Si A est réelle, en écrivant $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, le système fondamental s'écrit

$$t \mapsto t^r e^{t\alpha_j} \sin(\beta_j t)\, a,\quad t \mapsto t^s e^{t\beta_j} \cos(\beta_j t)\, b$$

où $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $r, s \le m_j - 1$.

Exemple : $\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_i = \alpha e^{t} + \beta e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} \frac{0}{+} \frac{2\pi}{3}\right) + \gamma e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} \frac{0}{+} \frac{2\pi}{3}\right)$

Cas particulier : Si A est diagonalisable, en notant $(x_1, \dots, x_n)$ une base propre de A, $(y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est fondamentale.

2) Equation complète.

En appliquant la méthode de variation des constantes :
$y : t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$
est l'unique solution vérifiant $y(t_0) = y_0$

Rq. : On peut appliquer le principe de superposition (linéarité) pour simplifier parfois.

III) Systèmes linéaires à coefficients variables.

1) Résolvante.

Définition : Si $(t, t_0) \in I^2$, on appelle résolvante de (E_H) l'isomorphisme : $R(t; t_0) = \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1}$.

Propriétés :
- $R(t_0; t_0) = Id$
- $R(t_2; t_1) R(t_1; t_0) = R(t_2; t_0)$
- $R'(\cdot; t_0) = A R(\cdot; t_0)$.
- Les solutions de (E) s'écrivent :

$y \mapsto R(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s) B(s)\, ds$
avec $y(t_0) = y_0$.

2) Wronskien.

Définition : On appelle wronskien W de (E_H) le déterminant d'un système fondamental.

Proposition : Si $t \in I$
$W(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds} \det(y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$

3) Equations d'ordres supérieurs.

L'étude de : $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = b$ (E') où $a_i, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ se ramène à :

$$\begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Cas où a_i est développable en série entière :

Proposition : Si $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ sont D.S.E. sur $I =]t_0 - R, t_0 + R[$, alors toute solution à (E') sur I est D.S.E.. **Exemple** : Equation d'Airy : $y'' - xy = 0$

4) Coefficients périodiques.

On suppose que A et B sont T-périodiques.

Théorème de Floquet - Massera : [DVPT]
(i) $\exists S$ T-périodique de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, Gl_n(\mathbb{C}))$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$R(\cdot; 0) = S e^{\cdot F}$
(ii) $\ker(R(T; 0) - Id) = \{0\} \Rightarrow \exists!$ solution T-périodique
(iii) (E) admet une solution bornée $\Leftrightarrow (E)$ admet une solution T-périodique

IV) Etude qualitative de solutions

1) Etude de zéros de solutions : exemple.

Considérons : $y'' + a y' + b y = 0$.

Théorème d'entrelacement des zéros :
Si y_1, y_2 est un système fondamental de solutions, entre deux zéros de y_1 il existe une unique zéro de y_2. **Exemple** : $y'' + y = 0$.

2) Stabilité des solutions : $I = [t_0, +\infty[$

a) **Définitions** : On définit $y(t, x)$, la solution de (E) telle que $y(t_0) = x$.

Références :

Hubbart - West

Gonnord - Tosel

• Gourdon AN

Francinou Oraux X-ENS

(i) $t \mapsto y(t, x)$ est stable s'il existe une boule $\overline{B}(x_0, r)$ et $C > 0$ vérifiant :
$\forall x \in \overline{B}(x_0, r), t \geq t_0 \, \|y(t,x) - y(t, x_0)\| \leq C\|x - x_0\|$

(ii) $t \mapsto y(t, x)$ est asymptotiquement stable s'il existe $\overline{B}(x_0, r)$ et $\gamma \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[, \mathbb{R}) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ t.q.
$\forall x \in \overline{B}(x_0, r), \forall t \geq t_0 \, \|y(t,x) - y(t,x_0)\| \leq \gamma(t)\|x - x_0\|$

b) Cas des systèmes à coefficients constants.

Théorème : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet pour valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors les solutions de (E_H) sont :

- asymptotiquement stables ssi $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \; \forall i$
- stables si $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ ou $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ et A induit un endomorphisme diagonalisable sur le sous-espace caractéristique de $\lambda_i \; \forall i$.

3) Aspects géométriques : champ de vecteurs réel en dimension 2, points singuliers.

On étudie les points d'équilibre (points de vitesse nulle) de $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $\det(A) \neq 0$ (A constante).
Un point de vitesse nulle est dit singulier, ici seule $\binom{0}{0}$ sera étudié.

Il existe 9 cas dépendant des valeurs propres de A menant à des comportements géométriques différents (cf. figures).

On note λ_1, λ_2 les valeurs propres de A.

V) Applications au cas non linéaire

1) Changement de variable.

a) Équations de Bernoulli.

$y' = a y + b y^{\alpha}$, $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$z = y^{1-\alpha}$ donne $z' = (1-\alpha) a z + (1-\alpha) b$

b) Équations de Ricatti.

$y' = a y^2 + b y + c \quad a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

$z = \dfrac{1}{y - y_0}$ où y_0 est supposé connue donne :

$z' + (2 a y_0 + b) z + a = 0$

2) Linéarisation d'un système autonome.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert

On considère $x' = f(x)$.

a) Th. de stabilité de Lyapounov [DVPT]

Si $f(0) = 0$ et que toutes les valeurs propres de $Df(0)$ sont à partie réelle < 0, alors les solutions sont asymptotiquement stables pour $x_0 = 0$.

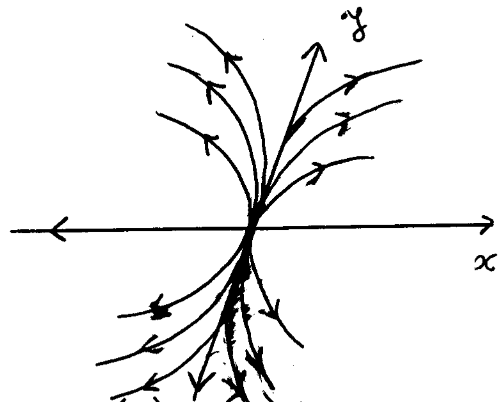
b) Th. d'instabilité de Cetaev.

Si $f(0) = 0$ et que l'une des valeurs propres de $Df(0)$ a une partie réelle strictement positive, alors les solutions ne sont pas stables pour $x_0 = 0$.

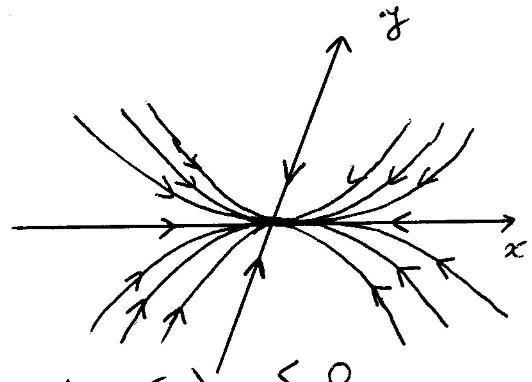
Application : le pendule avec frottements

$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \sin(\theta) = 0$.

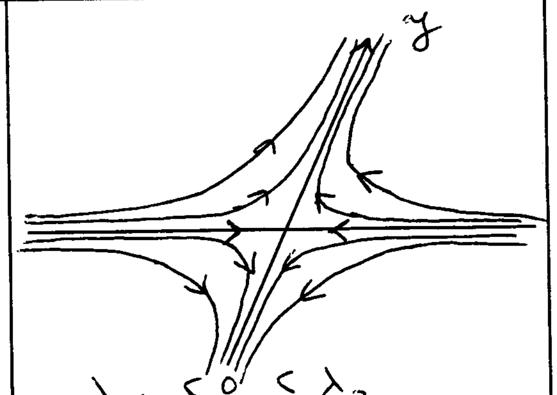
Les points d'équilibre $(0, 0)$ et $(0, \pi)$ sont respectivement a-stable et instable.



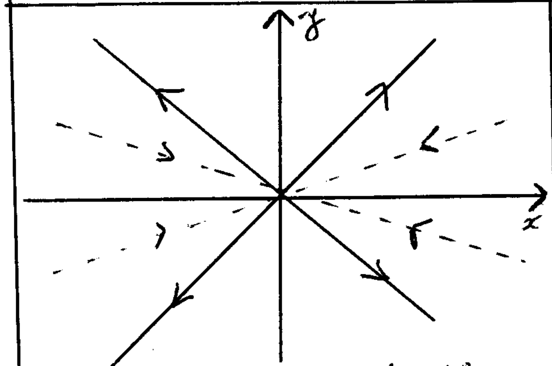
$0 < \lambda_2 < \lambda_1$
Nœud instable



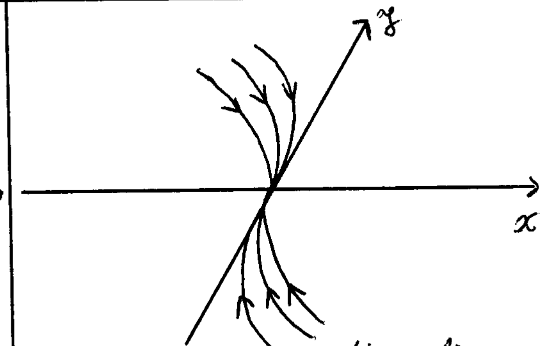
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
Nœud stable



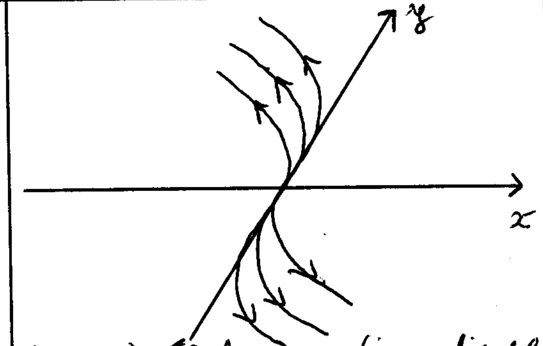
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
Col



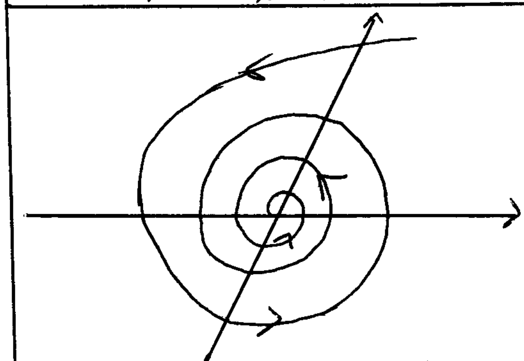
$\lambda_1 = \lambda_2$, A diagonalisable
Nœud propre instable / stable
$\lambda > 0$ $\lambda < 0$



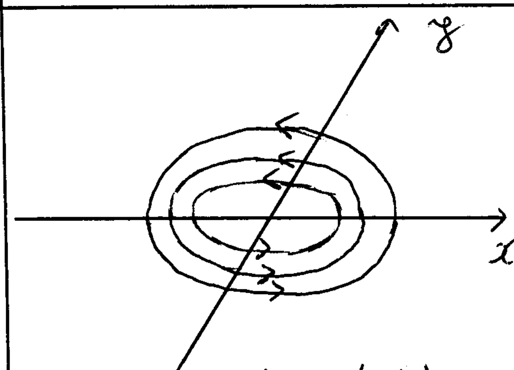
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, A non diagonalisable
Nœud exceptionnel stable



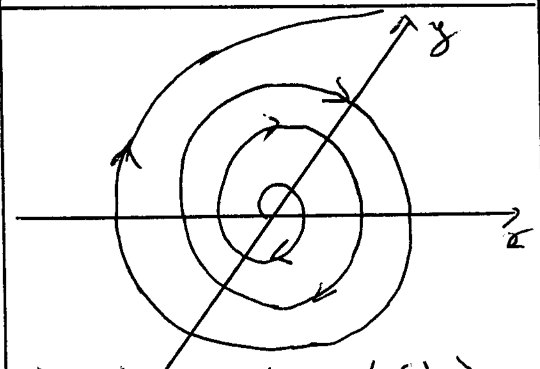
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, A non diagonalisable.
Nœud exceptionnel instable



λ_1, λ_2 complexes $tr(A) < 0$
Foyer attractif



λ_1, λ_2 complexes $tr(A) = 0$
Centre



λ_1, λ_2 complexes $tr(A) > 0$
Foyer répulsif.