Etude métrique des courbes - Exemples

Cadre : on se place dans $\mathbb{R}^n$ pour $n=2$ ou 3

I Les arcs

1) Définitions

On appelle : arc paramétré (de classe C^k) toute application $f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto f(t) \end{array}$ de classe C^k

- trajectoire de f, la partie $\{f(t), t \in \mathbb{R}^n\}$
- changement de paramétrage (de classe C^k)

def, toute application $\varphi: J \to I$ tq :

φ est de classe C^k sur J

φ est bijective

φ^{-1} est de classe C^k sur I

- paramétrage admissible (de classe C^k)

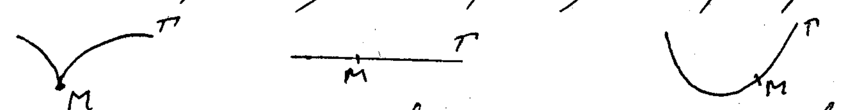
def, toute application $g: J \to \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe un changement de paramétrage (de classe C^k) φ tq : $g = f \circ \varphi$

- Soient $f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto M(t) = f(t) \end{array}$ un arc paramétré de classe C^1, Γ sa trajectoire, $M(t)$ un point de Γ. On dit que $M(t)$ est un point régulier de Γ ssi $f'(t) \neq 0$

Si f est de classe C^2, on dit que $M(t)$ est un point birégulier de Γ ssi $(\vec{f}'(t), \vec{f}''(t))$ est libre.

- De même, on dit qu'un arc paramétré $f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto M(t) = f(t) \end{array}$ de classe C^1 (resp C^2) est régulier (resp birégulier) ssi : $\forall t$, $M(t)$ un point régulier (resp birégulier) pour f.

Ex :



M n'est pas régulier — M régulier non birégulier — M birégulier

Rq : Si f est un arc paramétré régulier, alors tout paramétrage admissible est régulier.

Dans la suite, on ne considérera que les changements de paramétrage strictement croissant.

2) Etude métrique

Def : On appelle abscisse curviligne sur Γ, toute application $s: I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tq $\forall t \in I$, $s'(t) = \|\vec{f}'(t)\|$

On appelle longueur de l'arc $\widehat{AB}$ avec $A = f(a)$, $B = f(b)$, $a, b \in I$ le réel : $l(\widehat{AB}) = |s(b) - s(a)| = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt$ (a un sens car invariant par reparamétrisation)

Def : On appelle paramétrage normal de f, tout paramétrage admissible $g: J \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 de f tq $\forall u \in J$, $\|g'(u)\| = 1$

Prop : Si f est régulier alors pour toute abscisse curviligne s sur Γ, $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage normale de f.

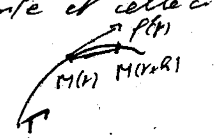
Def : Soient $f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto M(t) = f(t) \end{array}$ et Γ sa trajectoire

$t_0 \in I$, $A = M(t_0)$

On dit que Γ admet une tangente en A ssi le vecteur unitaire $\dfrac{\vec{AM}(t)}{\|\vec{AM}(t)\|}$ admet une limite lorsque t tend vers t_0

Prop : Soient $f: I \to \mathbb{R}^n$ et Γ sa trajectoire.

En tout point régulier $M(t)$ de Γ, Γ admet une tangente et celle-ci est dirigée par $\vec{f}'(t)$



Def : On appelle vecteur tangent unitaire de Γ en , le vecteur noté $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$ (f régulier)

Avec un paramétrage normal, on a $\vec{T}(s) = \vec{M}'(s)$

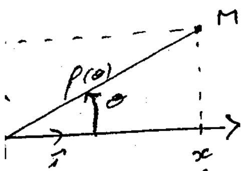
II Courbes dans le plan

1) Abscisse curviligne

$f(t) = (x(t), y(t))$ $\forall t \in I$

d'où $s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$

Coordonnées polaires



$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\rho}$

$\sin\theta = \frac{y}{\rho}$

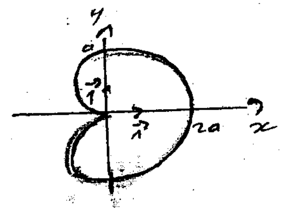
et on a $\vec{\rho} = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$ avec $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

et on a alors $s'(\theta) = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$

Ex : Cardioïde : $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$

$s'(\theta) = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$l(\text{Cardioïde}) = 8a$



$y = f(x)$, $s'(x) = \sqrt{1+f'^2(x)}$

2) Inégalité isopérimétrique

Thm : Soit C une courbe simple fermée de classe C^1 du plan, qui est la frontière d'un domaine borné B. Alors, si l est la longueur de C et a l'aire de B, on a $l^2 \geq 4\pi a$

ET l'égalité signifie que C est un cercle.

(D)

Autrement dit, parmi toutes les courbes fermées de longueur fixée, le cercle est celle qui enclôt l'aire maximum.

3) Courbure

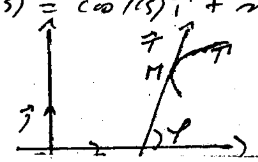
On a $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ (vecteur tangent unitaire)

on note $\vec{N} = \mathrm{Rot}_{\pi/2}(\vec{T})$.

$(M;\vec{T},\vec{N})$ est alors un repère orthonormé direct appelé repère de Frenet en M à Γ!

Prop : Soit $f : J \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage normal de classe C^k ($k \geq 2$) de Γ. Il existe une application $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} tq :

$\forall s \in J$, $\vec{T}(s) = \cos\varphi(s)\,\vec{i} + \sin\varphi(s)\,\vec{j}$



Def on appelle courbure en $M(t)$ de Γ, le réel $\gamma = \frac{\varphi'(t)}{s'(t)}$

rayon de courbure : $R = \frac{1}{\gamma}$

Rq : Si le paramétrage est normal, on a $\gamma = \varphi'(s)$

calcul théorique :

$f(t) = (x(t), y(t))$ alors $\varphi' = \frac{x'y''-x''y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $R = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-x''y'}$

en particulier, si $y = f(x)$, $R = \frac{(1+f'^2(x))^{3/2}}{f''(x)}$

en coordonnées polaires : $R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$

Prop (formules de Frenet)

$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R}$, $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{R}$

Prop : la courbure est invariante par isométrie

Thm : Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $c \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $0 \in I$.

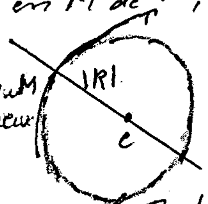
Soient a, b 2 éléments de $\mathbb{R}^2$. Alors il existe un arc f et un seul ayant une paramétrisation normale tq

$f(0) = a$, $f'(0) = b$ et $\gamma(t) = c(t)$ $\forall t \in I$

Def : On appelle centre de courbure en M de Γ, le point C de $\mathbb{R}^2$ défini par $\vec{MC} = R\vec{N}$

On appelle cercle osculateur en M de Γ, le cercle de centre C et de rayon $|R|$.

fct quadratique qui approche le mieux la courbe (analogie à Taylor)



On appelle développée d'une courbe Γ du plan, l'ensemble des centres de courbure C en M de Γ lorsque M décrit Γ.

Def : Soit $(D_t)_{t\in I}$ une famille de droite du plan d'équation :

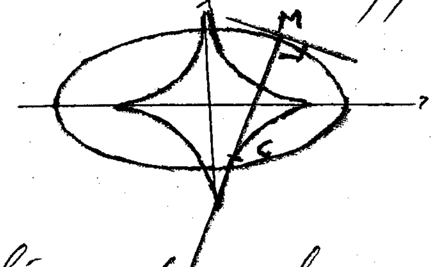
$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1

et $\forall t \in I$ $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

On appelle enveloppe de $(D_t)_{t\in I}$, toute courbe Γ du plan tq

- chaque D_t est tangente à Γ
- Γ admet en chaque point une tangente $\in (D_t)_{t\in I}$

Thm: La développée de Γ est aussi l'enveloppe des normales à Γ



III) Courbes de l'espace (ou courbes gauches)

1) Du plan à l'espace

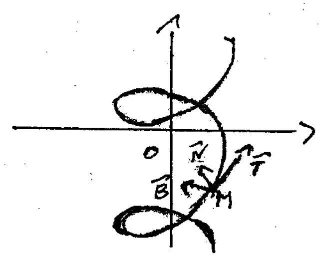
- abscisse curviligne : $s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$
- plan osculateur à Γ en $M(t)$: plan passant par $M(t)$ et dirigé par $(f'(t), f''(t))$
- courbure : $\gamma = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|$, rayon de courbure : $R = \frac{1}{\gamma}$

Rq : on reprend le résultat de Frenet pour s'en servir comme définition

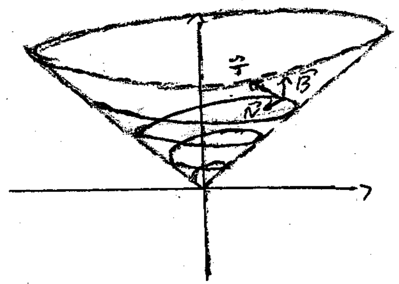
- vecteur normal principal : $\vec{N} = R\,\frac{d\vec{T}}{ds}$
- vecteur binormal : $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$
- $(M; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est un repère orthonormé direct appelé repère de Frenet en M à Γ.

Ex : - hélice circulaire à pas constant

$r \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases} \quad \in \mathbb{R}$$



- une autre hélice :
$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \\ z = e^{-t} \end{cases}$$
tracée sur le cône : $x^2 + y^2 - z^2 = 0$



2) Torsion

Déf : On appelle torsion, le réel $\tau = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}$

rayon de torsion : $T = \frac{1}{\tau}$

La torsion est invariante par isométrie

Prop (formules de Frenet)
$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R}$$
$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{R} + \frac{\vec{B}}{T}$$
$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{\vec{N}}{T}$$

Thm fondamental (D)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $c \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}_+^*)$ et $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et u, v, w 3 points de $\mathbb{R}^3$. Il existe alors un arc $\mathcal{C}$ de classe $\mathcal{C}$ et un seul dont une paramétrisation unitaire f soit telle que $f(0) = u$, $f'(0) = v$, $\frac{f''(0)}{\|f''(0)\|} = w$, $\gamma(t) = c(t)$ et $\tau(t) = d(t)$ $\forall$

⚠ Étude métrique donc les histoires d'inflexion, branche ∞ et tout c'est limite.

Rapport de jury : il faut mettre du $\mathbb{R}^3$

Parler de géodésique c'est bof. Car c'est sur une surface mais bon.

⚠ $\exists$ un paramétrage normal
Est-t-il unique ? Parce que certaines notions pourraient en dépendre

à partir du th. fond.

2 courbes ds l'espace. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

m̄ courbure

m̄ torsion

Alors $\exists$ déplacement de l'espace qui envoie l'une sur l'autre

f_1 paramétrage de $\mathcal{C}_1$

f_2 ——— $\mathcal{C}_2$

$f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

Monier de géométrie

Arez

Berger - Gostiaux