Etudes de Courbes. Exemples.

On considère un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n ($n=2$ ou 3). On précisera lorsqu'il sera euclidien. I, J seront des intervalles de $\mathbb{R}$.

I Différentes approches.

A/ Paramétrique

Définition:
On appelle courbe (ou arc) paramétrée de classe C^k tout couple $C=(I,f)$ où f est une application de classe C^k de I dans $\mathcal{E}$.

Définition:
Les relations R et R' définies respectivement par
- $\exists \varphi$ C^k-difféomorphisme tel que $f'=f\circ\varphi$
- $\exists \varphi$ C^k-difféomorphisme positif tel que $f'=f\circ\varphi$

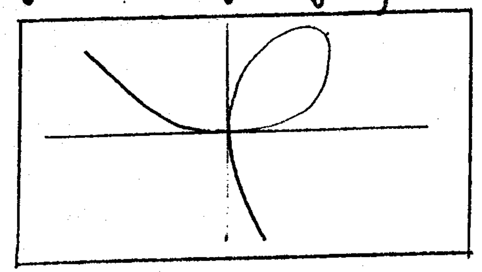
sont des relations d'équivalence.
On appelle courbes géométriques (resp. orientées) leurs classes d'équivalence. Un représentant d'une telle classe est appelé paramétrage.

Quelques formes de paramétisation:
- cartésienne : dans un repère $(O,e_1\ldots e_n)$ donnée par $(x_1(t),\ldots x_n(t))$
- polaire (en dimension 2) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ par $r(\theta)=(x^2+y^2)^{1/2}$ et $\theta=(\vec{i},\vec{OM})$
- cylindrique (ρ,θ,z)
- sphérique (r,θ,φ)

B/ Courbes implicites

Théorème: (Fonctions implicites)
soit $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-1}$, soit $\tilde{x}\in U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(\tilde{x})=0$
et $\det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x})\right)\neq 0$. Soit $C=\{x\in\mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x)=0\}$
Alors $\exists V\subset\mathbb{R}$ voisinage ouvert de $\tilde{x}_1$ et $F:V\to\mathbb{R}^{n-1}$ tel que
$F(V)$ soit un voisinage de $(\tilde{x}_2,\ldots\tilde{x}_n)$ et $\forall x_1\in V$ $\varphi(x_1,F(x_1))=0$
F est alors appelée courbe implicite de $\{\varphi(M)=0\}$.

Exemple:
le folium de Descartes défini par $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^3+y^3-3xy=0\}$ induit une courbe implicite pour tout couple $(x,y)\neq(0,0)$.
on obtient même ici



$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{3t}{1+t^2} \\ y(t)=\dfrac{3t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

II. Propriétés affines.

A/ Tangentes

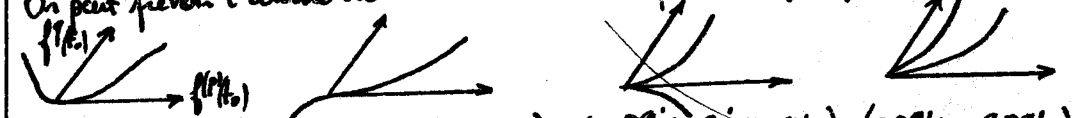
Définition:
on dit que $M(t)\in C$ est un point régulier (respectivement singulier) si f est différentiable en t (respectivement non différentiable).
Une courbe n'ayant que des points réguliers est dite régulière. Si elle est deux fois différentiable en tout point, elle est dite birégulière.

Définition:
soit $C=(I,f)$ une courbe, $t_0\in I$
si $\dfrac{\overrightarrow{f(t_0)f(t)}}{\|\overrightarrow{f(t_0)f(t)}\|}$ existe pour t voisin de t_0 et admet une limite en t_0^+ et t_0^- et qu'elles sont égales ou opposées, on dit que C admet une tangente en t_0. C'est la droite engendrée par ces limites.

Rem: La notion de tangente est invariante par reparamétrage.

B/ Etude locale

Plaçons-nous en dimension 2,
supposons qu'il existe $p=\min\{i\leq k \mid f^{(i)}(t_0)\neq 0\}$ et $q=\min\{p<i\leq k \mid f^{(i)}(t_0)\neq 0\}$
On peut prévoir l'allure de la courbe selon la parité de p et q comme suit:



(p impair, q pair) habituel — (p impair, q impair) inflexion — (p pair, q impair) Rebroussement première espèce — (p pair, q pair) Rebroussement seconde espèce.

Théorème: (Lemme de Morse)

soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ (U ouvert de $\mathbb{R}^n$)

on suppose $\begin{cases} Df(0)=0 \\ D^2f(0) \text{ non dégénérée de signature } (p,n-p) \end{cases}$

Alors $\exists \varphi : V \in \mathcal{V}(0) \subset \mathbb{R}^n \to W \in \mathcal{V}(0) \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme tel que $\varphi(0)=0$

et $f(x)-f(0) = \varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)+\dots+\varphi_p^2(x)-\varphi_{p+1}^2(x)-\dots-\varphi_n^2(x)$

Rem: ce théorème précise la nature de $\{\varphi(M)=0\}$. En effet en dimension 2 par exemple $\{\varphi(M)=0\}$ est soit l'union de deux droites, soit un point

exemple: dans le folium de Descartes en $(x,y)=(0,0)$, on pouvait prévoir l'allure de la courbe.

C] Branches infinies, asymptotes

Définition:

on regarde $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} \rho(\theta)$, c'est ce qu'on appelle des branches infinies, trois cas se présentent

$\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} \rho(\theta)=0$ (0 point asymptote) $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} \rho(\theta)=a$ ($\rho=a$ cercle asymptote)

$\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} \rho(\theta)=\pm\infty$ branche spirale

plus généralement, γ possède une branche infinie relative à θ_0 si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta)=\infty$

→ dans ce cas, la droite d'angle polaire θ_0 est direction asymptotique

→ si de plus $\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0) \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} d$, la droite $Y=d$ est asymptote (dans $(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$)

→ si $\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0) \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ il y a branche parabolique de direction la droite polaire d'angle θ_0

exemple: prenons le folium de Descartes,

$\lim\limits_{t\to -1^+} x(t) = \lim\limits_{t\to -1^-} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -1^-} x(t) = \lim\limits_{t\to -1^+} y(t) = +\infty$

mais $\lim\limits_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ et $\lim\limits_{t\to -1} x(t)+y(t) = -1$

la courbe possède donc une asymptote d'équation $x+y+1=0$.

III Propriétés métriques.

A] Rectification d'un arc

Définition:

soit $C=(I,f)$ une courbe régulière, on appelle longueur de l'arc de a à b ($a,b \in I$) l'intégrale $\int_a^b \|f'(t)\| dt$

Rem: le réel $\int_I \|f'(t)\| dt$ est indépendant de la paramétrisation, c'est la longueur de la courbe C notée $\text{long}(C)$.

Quelques exemples de calcul pratique:

→ paramétrisation cartésienne : $\text{long}(C) = \int_I \left(\sum\limits_{i=1}^{n} [f_i'(t)]^2 \right)^{1/2} dt$

→ paramétrisation polaire :

$$\text{long}(C) = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(t)+\rho^2\theta'^2(t)}\, dt$$

B] Abscisse curviligne

Définition:

soit $C=(I,f)$ une courbe régulière telle que de plus $\forall t \in I$ $\|f'(t)\|=1$ (on dit que C est paramétrée par longueur d'arc)

on pose alors $s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$, où $a \in I$ a été choisi comme origine

s est appelée abscisse curviligne

C] Frenet, courbure et torsion

on considère ici t comme un temps, C une trajectoire ($C=(I,f)$), $f'(t)$ la vitesse instantanée et $f''(t)$ l'accélération.

soit s une paramétrisation par longueur d'arc

On définit le repère de Frenet (mobile) par $(M, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

où $\vec{u}=f'(s)$, $\vec{v}=\|f''(s)\|^{-1} f''(s)$, $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$, $M=f(t)$

$M+\text{vect}(\vec{u},\vec{v})$ est appelé plan osculateur, il est donné par

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

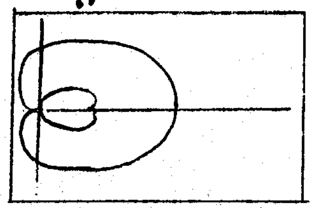
(où le repère et la paramétrisation sont quelconques)

Définition :
on appelle courbure de $C=(I,f)$ au point Π d'abscisse curviligne s le réel $c(s)=\|f''(s)\|$. $R(s)=\dfrac{1}{c(s)}$ est appelé rayon de courbure de C en Π.

Rem : pour le repère de Frenet en dimension 2 (arc paramétré plan), on a $\vec{U}'=c(s)\vec{V}$ et $\vec{V}'=-c(s)\vec{U}$

Définition :
le point $P(s)$ de la normale principale (ie la droite engendrée par $\vec{V}$) de $C=(I,f)$ en $\Pi(s)$ défini par $P(s)=\Pi(s)+R(s)\vec{V}(s)$ est appelé centre de courbure de C en $\Pi(s)$.
Le lieu $\{P(s) \mid s\in I\}$ est appelé développée de C.

exemple :
La développée d'une cardioïde est une cardioïde trois fois plus petite.



Définition : (en dimension 3)
si C est birégulier (ie $f'(t)$ et $f''(t)$ libres) de classe C^k ($k\geq 3$) d'abscisse curviligne s, on appelle torsion de C en s le réel $\Theta(s)$ tel que $\vec{W}'(s)=\Theta(s)\vec{V}(s)$. $\Theta(s)=\dfrac{1}{\theta(s)}$ est appelé rayon de torsion de C en Π.

On a ainsi,
$$\begin{pmatrix}U\\V\\W\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&c&0\\-c&0&-\theta\\0&\theta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U\\V\\W\end{pmatrix}$$

Théorème :
Soient $c,\theta : I\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec $c>0$. Alors il existe un paramétrisation $C=(I,f)$ de longueur d'arc ayant c pour courbure et θ pour torsion. De plus γ est unique à isométrie près.

IV Etude globale (en dimension 2).

Définition :
si I est un intervalle compact et si $f(a)=f(b)$, f définit une courbe fermée ($f:I\to\mathbb{R}^2$)
on a alors $\text{long}(C)=\int_a^b\|f'(t)\|dt$ comme vu précédemment

Théorème : (Jordan)
soit C une courbe fermée simple de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2\setminus C$ a exactement 2 composantes connexes notées C_{int} et C_{ext} avec $\partial C_{int}=\partial C_{ext}=C$.
On peut les caractériser par $\overline{C_{int}}$ compact et $\overline{C_{ext}}$ non compact.
C_{int} est appelé intérieur de C et C_{ext} l'extérieur de C

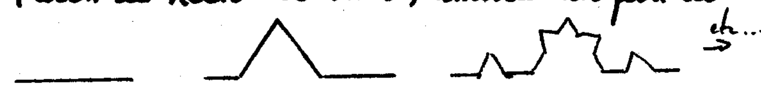
C_{int} étant compact, $A_C=\int_{\overline{C_{int}}}d\sigma$ a donc un sens. C'est l'aire de $\overline{C_{int}}$

Prop : $A_C=-\int_C y\,dx=\int_C x\,dy=\frac{1}{2}\int_C(x\,dy-y\,dx)$

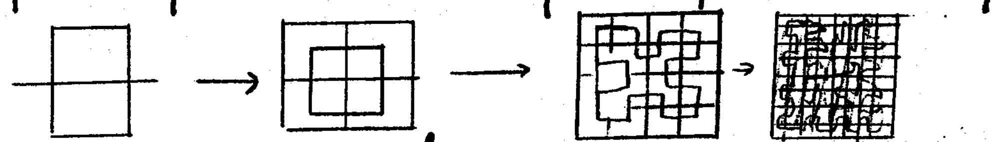
Théorème : (Inégalité isopérimétrique)
Toute courbe fermée simple C de classe C^k $k\geq 2$ vérifie
$\text{long}(C)^2\geq 4\pi\,\text{aire}(C)$
et l'égalité a lieu ssi C est un cercle.

Exemples pathologiques :

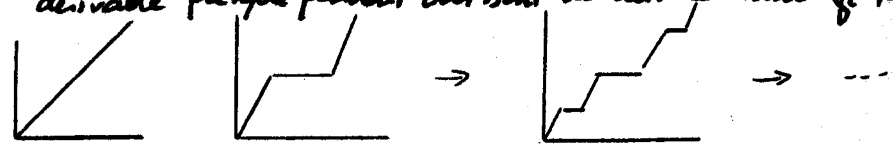
- le Flocon de Koch : continue, dérivable nulle part de longueur infinie



- la courbe de Peano remplit tout le carré, admet une infinité de points multiples et est continue. Les points multiples ne s'accumulent pas.



- l'escalier du diable défini via l'ensemble de Cantor dérivable presque partout croissant de dérivée nulle $f(0)=0$, $f(1)=1$



RÉFÉRENCES :

- Audin
- J. M. Monier, Géométrie MP - PSI - PC - PT
- Zuily - Queffélec