223. Convergence des suites numériques - Exemples et applications.

Cadre : On considère $(u_n), (v_n)$ et $(w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

I. Définitions et premières propriétés.

• Convergence.

Déf : (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$

Prop : • Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\begin{cases} u_n \to u \\ v_n \to v \\ w_n \to w \end{cases}$ Alors $u \leq v \leq w$.

• si (u_n) est monotone et bornée, elle converge.

Exple : $(u_n) / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

• Valeur d'adhérence.

Déf : $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est valeur d'adhérence de (u_n) si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

Prop : • leur ensemble est égale à $\bigcap \overline{\{u_k\}_{k \geq n}}$, compact de $\overline{\mathbb{R}}$

• $\limsup (u_n) = \lim_{n \to +\infty} (\sup_{k \geq n} u_k) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} \{u_j\}_{j \geq k}} = \sup \{\text{valeurs d'adhérence}\}$ (et de même avec liminf).

• Si (u_n) a une unique valeur d'adhérence a, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

exple : • $u_n = \sin(n)$. $\{\text{valeur d'adh}\} = [-1; 1]$.

Appli : Suites sous-additives ou sous multiplicatives.

Si $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Alors $\left(\frac{u_n}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_{n \geq 1} \left(\frac{u_n}{n}\right)$

D'où conséquence : Si T est un opérateur linéaire borné dans un Espace de Banach. $u_n = \|T^n\|^{1/n}$ converge.

• suites adjacentes :

Déf : (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante et $(u_n - v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Prop : 2 suites adjacentes convergent vers une même limite.

Exple : Suite arithmético-géométrique. si $0 < v_0 < u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$; $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Appli : Critère des séries alternées :

si $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et décroissante. Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}$

→ exple : $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n} \Rightarrow v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors $\sum v_n$ converge ssi $\alpha > 1/2$

• Suites de Cauchy.

Déf : (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ telque $\forall p, q \geq n, |u_p - u_q| < \varepsilon$

Prop : (u_n) est de Cauchy si et seulement si (u_n) converge

Appli : toute série absolument convergente converge.

II. Liens avec les fonctions continues.

Prop : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$

exple : $u_n = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = (-1)^n \Rightarrow x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

• Suites équiréparties modulo 1

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\} = x - [x]$.

Déf : (u_n) est equirepartie modulo 1 si pour tout $0 \leq a < b < 1$ $\frac{1}{n} N(a,b,n) \longrightarrow (b-a)$ où $N(a,b,n) = \#\{k \leq n, \{u_k\} \in [a,b]\}$

Thm: (Critère de Weyl) il y a équivalence entre :

(i) u_n est équirépartie modulo 1.

(ii) pour tout f continue, 1-périodique, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)dx$

(iii) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi j u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.

expl : si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $(x_0 + n\theta)$ est équirépartie.

III. Suites récurrentes. $u_{n+1} = f(u_n)$. récurrence linéaire?

Prop : Soit I intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ continue, (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ si $\exists l \in I \,/\, u_n \to l$ alors $l = f(l)$.

Rque : f admet au moins un point fixe $\not\Rightarrow$ convergence de u_n.

ex : $u_0 > 1$, $u_{n+1} = u_n^2$ alors $f(1) = 1$ et $(u_n) \to +\infty$

Prop : Si f est croissante alors (u_n) est monotone.

ex : Sur $\mathbb{R}^+$, $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{1+x}}$, ~~alors~~ f croissante bornée $\Rightarrow (u_n)$ converge.

Thm : Méthode de Newton pour les polynômes.

Soient $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_R \in \mathbb{R}$, $(n_i)_{1\leq i\leq r} \in (\mathbb{N}_*)^R$ et P le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{R} (X - \xi_i)^{n_i}$, soit $x_0 > \xi_R$. alors la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$ converge vers ξ_R.

De plus,
- si $n_R = 1$, $\forall c > 0$, $|x_n - \xi_R| = o(c^n)$
- si $n_R > 1$, $\exists c > 0$ tq $|x_n - \xi_R| \sim c\left(1 - \frac{1}{n_R}\right)^n$

Thm : Soit I intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ contractante, alors pour tout $u_0 \in I$, (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f.

- suites homographiques : $u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d}$, $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Prop : On pose (E) $cx^2 - (a-d)x - b = 0$. Alors

- si (E) admet 2 racines distinctes α et β, alors
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$
- si (E) admet 1 racine double α alors
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn$ où $k = \frac{c}{a - \alpha c}$

Remarque : cela reste vrai dans $\mathbb{C}$, cas par lequel on peut passer si (E) n'admet pas de racine réelle.

IV. Liens avec les séries.

Prop : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\exists l \in \mathbb{R}$, $u_n \to l$ alors sa moyenne de Cesaro $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \to l$

Rque : la réciproque est fausse. ex $u_n = (-1)^n \not\Rightarrow S_n \to 0$.

Appli : Si $c > 0$, $f : [0, c] \to [0, c]$ continue telle que en 0^+ :
$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, $a > 0$, $\alpha > 1$.
Pour u_0 assez petit, (u_n) définit par $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers 0.
et $u_n \sim \frac{1}{[na(\alpha-1)]^{1/1-\alpha}}$

- Lien suite-série.

Prop : $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge $\Leftrightarrow$ u_n converge.

$\hookrightarrow$ appli : (Stirling) $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Prop: Si $(v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum v_n < +\infty$

Alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ converge absolument

Règle de Cauchy: on pose $\ell = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$

Alors
- si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge absolument
- si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement
- si $\ell = 1$, "on ne peut rien dire à priori"

Pour $\ell = 1$, exemple
- $u_n = 1/n$: $u_n \to 0$ mais $\sum u_n$ diverge
- $u_n = (-1)^n/n^2$: $\sum u_n$ converge absolument.
- $u_n = (-1)^n/n$: $\sum u_n$ converge, mais pas absolument.

Thm: Un théorème taubérien:

Si $(a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ décroissante. $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\alpha \in]0,1[$, $c > 0$

Alors $a_n \sim c\, n^{-\alpha} \Leftrightarrow S_n \sim c \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Rem: Sans la décroissance des (a_n). $a_n = \begin{cases} n^{-1/\alpha} & \text{si } n \text{ pair} \geq 1 \\ 0 & \text{si ~~impair~~} \end{cases}$

et $S_n \sim \sqrt{n}$

V. Lien avec la théorie des nombres.

Def: On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ...)

$\cdot\ \Pi_n(n) = \#\{p \text{ premier} \leq n\} = \sum_{p\leq n} 1$.

On peut majorer p_n brutalement par:

$$p_{n+1} \leq \left(\prod_{k\leq n} p_k\right) + 1 \Rightarrow p_n \leq e^{2^n} - 1$$

Mais, plus précisement.

en notant $\forall n \geq 1$, $a_n = \Pi(n) \dfrac{\log n}{n}$, on a

Prop: $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}^+_*$ tq $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, A_1 < a_n < A_2$

(autrement dit (a_n) est borné)

D'où.

Thm. (de Tchebychev)

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \leq 1 \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$$

VI. Méthode d'accélération de convergence d'Aitken:

Prop: Si $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to \xi \in \mathbb{R}$, $\exists k \in \mathbb{R}, |k| < 1$

$\exists (\varepsilon_n) \to 0$ tq $\forall n \geq 0, x_n \neq \xi$,

$$(x_{n+1} - \xi) = (k + \varepsilon_n)(x_n - \xi)$$

Alors, on construit (y_n) telle que.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Alors $\begin{cases} y_n \to \xi \in \mathbb{R} \\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{y_n - \xi}{x_n - \xi} = 0 \end{cases}$ (y_n converge plus vite que x_n vers ξ)

Prop: De plus si $x_{n+1} = f(x_n)$, f C^2 sur $\mathbb{R}$, $x_n \to \xi$ point fixe de f.

on pose: $y_{n+1} = y_n - \dfrac{(f(y_n) - y_n)^2}{f^2(y_n) - 2f(y_n) + y_n} = g(y_n)$ et $y_0 = x_0$.

Alors
- si $g(a) = a$ alors $f(a) = a$.
- si $f(a) = a$ et $f'(a) \neq 1$ alors $g(a) = a$.

D'où. si $|f'(\xi)| > 1$, si $x_0 - \xi$ assez petit alors $(y_n) \to \xi$

avec $\forall c > 0$, $|y_n - \xi| = o(c^n)$.

Références :

- Gourdon. Analyse.
- Tenenbaum. Introduction to probabilistic and analytic number theory.
- Chambert Loir Analyse 1 et 2.
- Oraux X-ENS. Analyse 2.
- ZQ. (Zuily Queffélec).
- Demailly analyse numérique et équations différentielles.

DVP possibles.

- Formule de Stirling.
- Critère de Weyl.
- Un thm de Tchebychev.
- Newton pour les polynômes.

Il est possible de parler des fractions continues. et de truc dans $\mathbb{C}$.

Jarkowski

Développement en base

Fractions continues

intég. numérique