CONNEXITE : EXEMPLES ET APPLICATIONS

I Généralités [QUE]

1/ Definitions

Prop: Soit (X,τ) un espace topologique, on a les équivalences suivantes

(i) $X = O_1 \sqcup O_2$, $O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$

(ii) X et $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermées de X

(iii) $X = F_1 \sqcup F_2$, F_1, F_2 fermés $\Rightarrow F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$

(iv) toute application continue $f : X \to \mathbb{Z}$ est constante

Au quel cas on dit que (X,τ) est connexe

Déf: Soit $A \subset X$. A est dite connexe ssi $(A, \tau_{|A})$ l'est

rmq : il revient au même de demander $A \subset O_1 \sqcup O_2 \Rightarrow A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$

Exemple: Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles

2/ Propriétés de stabilité

Théorème: L'image continue d'un connexe est connexe.

Applications:
- $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe (det)
- S^1 et $[0,1]$ ne sont pas homéomorphes

Prop: Si C est connexe $C \subset A \subset \bar{C} \Rightarrow A$ connexe

Prop: Un produit d'espaces topologiques est connexe ssi tous ses facteurs le sont.

Exemples: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ sont connexes

Prop: Une union de connexes ayant un point commun est connexe

Rmq:
- on peut affaiblir les hypothèses...
- on a rien pour l'intersection 

Quotients de connexes sont connexes

3/ Connexité par arcs

Definition: On appelle arc dans (X,τ) toute application continue $[0,1] \to X$

On dit que (X,τ) est connexe par arcs ssi on peut joindre deux points quelconques de X par un arc dans X

Exemple: les convexes sont connexes par arcs

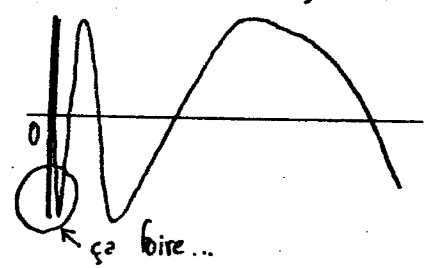
Théoreme: connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe

Application: $SO(n)$ est connexe (utiliser la forme réduite...)

$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe $(\det(tA + (1-t)B) \dots)$

rmq: la reciproque est fausse

considerer : $\overline{\{(t, \sin \frac{1}{t}),\ t \in \mathbb{R}_+^*\}}$



Par contre on a :

Prop: Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs

4/ Composantes connexes

Prop : La relation binaire définie sur (X,τ) par
$x \sim y$ ssi il existe C connexe de X tq $x,y \in C$
est une relation d'équivalence, la classe de $x \in X$ est appelée sa composante connexe et n'est rien d'autre que $\bigcup_{\substack{C \text{ connexe} \\ x \in C}} C$
(en particulier connexe) et on a $X = \bigsqcup C_i$ (unique...)

Exemple : $O_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R}) \sqcup O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$

Application : Une application $X \to \mathbb{R}$ localement constante est constante sur chacune des composantes connexes.

5/ Connexité dans les groupes topologiques

Définition : On appelle groupe topologique la donnée d'une topologie sur un groupe, compatible avec la loi de composition ie tq :
1/ $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$ est continue
2/ $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ est continue

$(G, \cdot, \tau)$ désignera maintenant un groupe topologique.

Prop : La composante connexe G_0 du neutre est un sous groupe distingué

Prop : Si G est connexe et H est un sous groupe voisinage du neutre
Alors $H = G$

Applications : 1/ Théorème de BROWER en dimension 2 ie toute application $\mathbb{D} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbb{D}$ admet un point fixe (DVP)

2/ Surjectivité de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ (DVP) [CHA]

II Application à l'analyse réelle

1/ Une seule variable

Th. Darboux

Théorème des valeurs intermédiaires :
L'image continue d'un intervalle est un intervalle

Bruyer Belyner $f^{(n)}(x) = 0$

Applications : 1/ Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue, alors f admet un point fixe
2/ Un marcheur qui parcourt 4km en 1h a parcouru 2km pendant un intervalle d'une demi-heure.
3/ Méthode de dichotomie
4/ Théorème de SHARKOVSKI : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue tq f admette un point periodique de période 3, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ f admet un point periodique de periode n. [CL]

2/ Plusieurs variables

Prop : Soit O un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : O \to E$ evn différentiable tq $\forall x \in O$, $Df_x = 0$ alors f est constante

Théorème d'HADAMARD-LEVY (DVP : version $\mathcal{C}^2$) [ZQ]
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$
Alors f difféomorphisme globale $\iff$ f propre et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|\mathrm{Jac}(f)(x)| \neq 0$

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne [ZQ]
le système $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale.

III Application à l'analyse complexe [CAR]

1/ Zéros isolés, prolongement analytique, principe maximum

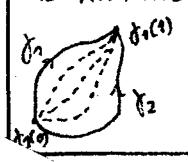
Ici, Ω designe un ouvert convexe de $\mathbb{C}$

Théorème : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe non nulle
Alors $f^{-1}(\{0\})$ est discret dans Ω

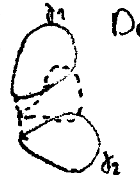
Théorème : Soient f et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes telles que $f \equiv g$ sur une partie de Ω ayant un point d'accumulation
Alors $f \equiv g$ sur tout Ω

rmq : problème de l'existence de prolongement...
Exemple : prolongement de la fonction Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ ($\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$...)

2/ Intégrale de CAUCHY, homotopie



Definitions : Deux chemins (arcs $\mathcal{C}^1$) γ_1 et γ_2 de mêmes extrémités sont dits homotopes ssi : $\exists F : [0,1]^2 \to \Omega$ tq
$F(0,t) = \gamma_1(t)$; $F(1,t) = \gamma_2(t)$; $F(s,0) = \gamma_1(0)$; $F(s,1) = \gamma_1(1)$



Deux lacets ($\gamma(0) = \gamma(1)$) γ_1 et γ_2 sont homotopes ssi :
$\exists F : [0,1]^2 \to \Omega$ continue tq $F(0,t) = \gamma_1(t)$; $F(1,t) = \gamma_2(t)$; $F(s,0) = F(s,1)$

Théorème : Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$
L'application $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma \ni a \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}$
est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$ et nulle sur celle non bornée.

Théorème : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe
γ_1, et γ_2 deux chemins (ou deux lacets) homotopes
Alors $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

Definition : Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est dit simplement connexe ssi tout lacet est homotope à un point

Théorème : Sur un domaine simplement connexe toute fonction holomorphe admet une primitive, unique à une constante additive près

Exemple : determination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

On peut parler de repères conforme

Références : H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytique* [CAR]
H. QUEFFELEC, *Topologie* [QUE]
H. QUEFFELEC - C. ZUILY, *Analyse pour l'agrégation* [ZQ]
L. CHAUSSADE, *Notes de cours 2007-2008* [CHA]
A. CHAMBERT-LOIR, *Exercices d'analyse pour l'agrégation* [CL]

+ MILNOR et BOOLE