Espaces complets. Exemples et applications — 205

I Généralités

1 Définitions

déf : (x_n) suite de (E,d) métrique est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N} / \forall p,q \geq N,\ d(x_p,x_q)<\varepsilon$$

Rq : (x_n) convergente $\Rightarrow (x_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ bornée
Rq : si $u_k = d(x_{k+1},x_k)$ vérifie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < +\infty$, alors (x_n) est de Cauchy

déf : • (E,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de E converge
• si E est de plus un evn, il est dit "de Banach"
• si E est de plus préhilbertien, il est dit "de Hilbert"

Contre ex : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.
En effet, $u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n!}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$,
mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$

Critère de Cauchy pour les fonctions
soient (E,d), (F,δ) complets, $f: E\to F$, et $a\in A$. f admet une limite en a ssi :
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 / \left(d(a,x)<\delta \text{ et } d(a,y)<\delta\right) \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$

Rq : La complétude est une notion métrique, et pas uniquement topologique
Par exemple, si $E=\mathbb{R}$, et $d(x,y)=|x-y|$, $\delta(x,y)=|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y|$
Alors • $(\mathbb{R},d)$ et $(\mathbb{R},\delta)$ sont homéomorphes
• $(\mathbb{R},d)$ est complet (cf ⊕loin) mais pas $(\mathbb{R},\delta)$

Rq : si d et δ sont uniformément équivalentes, alors
(E,d) complet $\Leftrightarrow (E,\delta)$ complet

2 Complété d'un espace, exemple de $\mathbb{R}$

Prop : soit A dense dans (E,d) et (F,δ) complet. soit $f: A\to F$ unif^t $\mathcal{C}^0$.
Alors $\exists!$ fonction $\tilde{f}: E\to F$ unif^t $\mathcal{C}^0$ qui prolonge f.

Appli : définition de la transformée de Fourier dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$
définition de l'intégrale de fonctions réglées

Théo soit (E,d) espace métrique
$\exists (E',\delta)$ tq $\begin{cases} E \text{ s'injecte dans } E' : E \xrightarrow{\varphi} E',\ \varphi \text{ isométrie} \\ \varphi(E) \text{ dense dans } E' \text{ et } E' \text{ est complet} \end{cases}$

E' est unique à isométrie près.

exemple : $\mathbb{R}$ peut être construit comme complété de $\mathbb{Q}$, muni de $d(x,y)=|x-y|$
on a ainsi dans $\mathbb{R}$:

Principe de la borne supérieure
Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Conséquences
• toute suite réelle croissante majorée converge
• Convergence des suites adjacentes.
• Toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monotone admet des limites à gauche et à droite en tout point
• Définition de la période d'une fonction périodique continue !

3 Premiers exemples, propriétés

Exemples :
• Un produit fini des complets est complet
$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ est un Banach pour n'importe quelle norme
• si X espace topo., et E Banach, alors $(\mathcal{F}_b(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach
• si E complet, $F\subset E$. Alors F fermé $\Leftrightarrow$ F complet
$\Rightarrow \mathcal{C}(K,E)$ est un Banach si K compact et E Banach
• E evn, F Banach $\Rightarrow \mathcal{L}_c(E,F)$ Banach
par exemple : le dual d'un EVN est un Banach
• $L^p(\Omega,dx)$ est un Banach, $\forall p\in[1,+\infty]$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$)
• si (E,d) complet, Alors (E compact $\Leftrightarrow$ E précompact)
appli : $E=[0,1]^{\mathbb{N}}$, muni de $\delta(x,y)=\sum_{i\geq 0}\frac{|x_i-y_i|}{2^{i+1}}$ est compact.

Prop :
$(E, \|\cdot\|)$ Banach $\Leftrightarrow$ toute série de E normalement convergente est convergente

Appli : 1) définition de $\exp(A)$, pour $A \in \mathcal{L}_c(E)$
2) $GL(E)$ est ouvert
3) Théorème de Tietze : soit $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, où Y fermé de (X,d)
Alors $\exists g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ tq $g_{|Y} = g_0$

II Théorème du point fixe de Picard

1) le théorème, et deux améliorations

Théo : soit (X,d) complet, et $f : X \to X$ k-contractante, avec $k < 1$
Alors $\begin{cases} f \text{ possède un unique point fixe } a \\ \text{si } x_0 \in X,\ d(f^n(x_0), a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \end{cases}$

Rq : les hypothèses sont nécessaires :
- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x + e^{-x}$ est seulement strictement 1-contractante. Pas de pt fixe
- $f :]0,1] \to]0,1]$, $x \mapsto x/2$ $]0,1]$ n'est pas complet. Pas de point fixe

Théo : on suppose seulement que f admet une itérée f^p k-contractante
Alors on a la même conclusion (mis à part la vitesse de convergence)

Théo : Continuité du pt fixe
si Y espace topo, X complet, et $f : X \times Y \to X$ continue, uniformément contractante
Alors $\forall y \in Y$, $f(x,y) = x$ admet une unique solution $\varphi(y)$
et φ est continue

2) Applications

- une équation fonctionelle :
soient $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, continue, $\varphi \not\equiv 1$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$
Alors le problème $(f(0) = \alpha\ ;\ f'(x) = f(\varphi(x)))$ admet une unique solution dans $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$

- Théo : Cauchy-Lipschitz
soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, globalement lipschitzienne :
$\forall K$ compact $\subset I$, $\exists k > 0 / \forall t \in K, \forall y, z \in \mathbb{R}^n$, $\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k \|y - z\|$
Alors le problème $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$ admet une unique solution sur I $\forall (t_0, x) \in I \times \mathbb{R}^n$

DVP

- Théo : Inversion locale
soient E, F des Banach, $\mathcal{U}$ ouvert de E, et $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$
et soit $a \in \mathcal{U}$ tq $Df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$. Alors $\exists V, W$ voisinages de a et $f(a)$
tq $f_{|V} : V \to W$ difféomorphisme

3) La distance de Hausdorff

on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{A}$ des compacts $\neq \emptyset$ d'un espace (X,d) complet

Prop
- $h(A,B) = \|d_A - d_B\|_\infty$ où d_K désigne la distance à K définit une distance sur $\mathcal{A}$
- $(\mathcal{A}, h)$ est complet

Théo : soient $f_1, \dots f_p$ λ-contractantes de $X \to X$
$T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $K \to \bigcup_{j=1 \dots p} f_j(K)$ admet un unique point fixe

on peut ainsi construire des objets fractals
ex : si $X = [0,1]$, $f_1(x) = \frac{x}{3}$ $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$ $\to$ ensemble triadique de Cantor

III Théorème de Baire

déf : E de Baire $\Leftrightarrow$ toute intersection dénombrable d'ouverts dense de E est dense

Prop : Caractérisation des fermés emboîtés :
$(E \text{ complet}) \Leftrightarrow (\forall (F_n)_n$ suite $\searrow$ de fermés / $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, on a $\bigcap_{\mathbb{N}} F_n = \{1 \text{ pt}\})$

Conséquence :
Tout espace complet est de Baire

ex : tout EVN à base dénombrable est non complet

① Applications en analyse fonctionnelle

Théo : BANACH-STEINHAUS

E Banach, F evn. soit $(T_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}_c(E,F)$, tq $\forall x\in E$ $(T_i(x))_{i\in I}$ soit bornée

alors $(T_i)_{i\in I}$ bornée

Conséquences

- une limite simple d'opérateurs continus définit un opérateur continu
- une application bilinéaire continue /à chaque variable est continue

Appli : si $S_n(f)$ désigne la n^{eme} somme de Fourier de $f\in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$

$\exists F \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dense / $|S_n(f)(0)| \longrightarrow +\infty$ $\forall f\in F$

Théo : APPLI OUVERTE. soient E,F Banach

$T\in \mathcal{L}_c(E,F)$ surjective $\Rightarrow$ T ouverte

Coq : si T est de plus bijective, T est un isomorphisme d'evn

Appli : $\mathcal{F} : \mathbb{L}^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0$ n'est pas surjective

$f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$

Théo : GRAPHE FERMÉ soient E,F Banach

$\left.\begin{array}{l} T\in \mathcal{L}(E,F) \\ G=\{(x,T(x)), x\in E\} \text{ fermé de } E\times F \end{array}\right\} \Rightarrow T$ est continu.

Appli : F sev fermé de E admet un supplémentaire topo ssi $\exists p : E\to F$ projection $\mathcal{C}^0$

② Applications diverses

- $(f_n) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues, $f_n \to f$ simplement $\Rightarrow$ f est continue sur une partie dense
- $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable $\Rightarrow$ f' continue sur une partie dense
- $f : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue, $f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall x>0$ $\Rightarrow$ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- les fonctions continues nulle part dérivables sont denses — DVP
- Critère de Kitai : soit $A\in \mathcal{L}_c(E)$; où E ev métrique complet

A est hypercyclique (i.e. admet une orbite dense) ssi :

$\exists X,Y$ denses dans E, $B : Y\to Y$ / $\forall x\in X, \forall y\in Y$, $A^n(x)\to 0$, $B^n(y)\to 0$, $AB(y)=y$

exemple : $A : f \to f'$ dans $H(\mathbb{C})$ muni de la convergence uniforme sur tout compact

$A : (u_n)_n \to (\lambda u_{n+1})_n$ dans ℓ^2 (avec $\lambda>1$)

IV Les espaces de Hilbert

$(H,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ Hilbert, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

① Dualité

$\forall x\in H$, $\varphi_x : y \to \langle y|x\rangle$ définit un élément de H'.

Théo : RIESZ

$\varphi : y \to \varphi_y$ définit un isomorphisme de Hilbert de H sur H'

Appli : définition de l'adjoint d'un endomorphisme $u\in\mathcal{L}_c(H)$

Appli :

pour $p\in[1,2]$, $(\mathbb{L}^p)' \simeq \mathbb{L}^q$ où $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$

DVP

② Projection sur un convexe fermé

Théo : soit F convexe fermé de H.

$\forall x\in H$, $\exists ! a\in F$ / $\|x-a\| = d(x,F)$

si F est un sev, a est caractérisé par $(x-a)\in F^\perp$. On note $a=p_F(x)$

Appli : définition de l'espérance conditionnelle :

$H=\mathbb{L}^2(E,\mathcal{F},\mu)$, $F=\mathbb{L}^2(E,\mathcal{G},\mu)$ où $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$

on définit, pour X une v.a. de H, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = p_F(X)$

Prop : si H est séparable, il admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si dim H=∞) (orthonormale et totale), et dans ce cas,

$\varphi : x\in H \to (\langle x|e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ est un isomorphisme

On a en particulier : $\langle x|y\rangle = \sum_{n\geq 0} \langle x|e_n\rangle\langle y|e_n\rangle$ PARSEVAL

③ Exemples de bases hilbertiennes

- dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, on a la base hilbertienne : $e_n(t)=e^{int}$, $n\in\mathbb{Z}$

Appli : calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$

- si $\rho : I \to \mathbb{R}^{+*}$ est telle que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$ pour un $\alpha>0$,

alors $(x\to x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille totale de $\mathbb{L}^2(I,\rho)$

Par Gram-Schmidt, on forme la base hilbertienne des polynômes ~~orthogonaux~~ associée à ρ.

exemple : pour $\rho(x)=e^{-x^2/2}$ $\to$ polynômes de Hermite

Appli : construction d'une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

④ Théorème de Lax-Milgram

Théo : soit $\begin{cases} a : H^2 \to \mathbb{R} \text{ bilinéaire continue coercive } (\exists\alpha>0 / a(x,x)\geq\alpha\|x\|^2) \\ L\in H' \end{cases}$

Alors $\exists ! u\in H$ / $\forall x\in H$, $a(u,x)=L(x)$

Appli : Existence et unicité de solutions faibles à des équations elliptiques.

__Références__ : Gourdon Analyse pour le III Notamment
Queffelec "Topologie" pour le II Nótamment
Gonnord-Tosel (Kitaï)
Guichardet "Intégration, Analyse Hilbertienne" pour le IV
OA (Polynômes orthogonaux)

autres Dvp. __possibles__ :

- Théorème d'inversion locale
- la distance de Hausdorff :
- Banach-Steinhaus ⊕ 1 appli.
- Kitaï
- Polynômes orthogonaux
- Espace de Bergman } pour les bases hilb.
- Th. de Shannon }