2007/2008

224 : COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SUITES NUMÉRIQUES - RAPIDITÉ DE CONVERGENCE - EXEMPLES.

plan ambitieux
↳ savoir démo. ce qu'on écrit
(Σ de Riemann, dvp Stirling)
⇒ parler plus d'analyse num. pr éviter pb…

I - Généralités sur le comportement asymptotique.

1) Définitions.

Déf : $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques. On dit que :
(i) $u_n = O(v_n)$ ssi $\exists M>0 / \forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\leq M|v_n|$.
(ii) $u_n = o(v_n)$ ssi $\exists (\varepsilon_n)_{n\geq 0} / \lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et $u_n = \varepsilon_n v_n, \forall n\in\mathbb{N}$
(iii) $u_n \sim v_n$ ssi $u_n - v_n = o(v_n)$.

Déf : (Échelle de comparaison)
On appelle échelle de comparaison un ensemble $\mathcal{E}$ de suites tel que si $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont dans $\mathcal{E}$, alors :
$(x_n)_{n\geq 1} = (y_n)_{n\geq 1}$ OU $x_n = o(y_n)$ ou $y_n = o(x_n)$

Ex : • $n^k, k\in\mathbb{Z}$; • $n^k \log(n)^l, (k,l)\in\mathbb{Z}^2$.

Déf : (Développement asymptotique)
On appelle développement asymptotique à $l\in\mathbb{N}^*$ termes de $(u_n)_{n\geq 1}$ par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ toute expression de la forme :
$c_1 v_n^{(1)} + c_2 v_n^{(2)} + \dots + c_l v_n^{(l)}$ où $\forall i, c_i\in\mathbb{R}, v_n^{(i)}\in\mathcal{E}$,
$v_n^{(i+1)} = o(v_n^{(i)})$ et $u_n = c_1 v_n^{(1)} + \dots + c_l v_n^{(l)} + o(v_n^{(l)})$.

Prop : [Si un tel développement asymptotique existe, il est unique.

Rq : $u_n \sim c_1 v_n^{(1)}$: $c_1 v_n^{(1)}$ est la partie principale de $(u_n)_{n\geq 1}$.

Ex : • $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
Alors $u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
• $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0>0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $u_n \sim \sqrt{2n}$.

2) Outils de comparaison.

a) Utilisation des développements limités.

Ex : • $\sin(n!\,e\pi) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$;
• $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Équivalents des sommes partielles et des restes.

Th : [$u_n, v_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_n \sim v_n$. Alors :
(i) $\sum u_n$ cv $\Rightarrow \sum v_n$ cv et $\sum\limits_{k\geq n} u_k \sim \sum\limits_{k\geq n} v_k$.
(ii) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge et $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Ex : $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$

c) Comparaison série - intégrale.

Prop : [$f : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ décroissante. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(0)+\dots+f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$ converge et en particulier, $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Ex : Développement asymptotique de la série harmonique.

d) Moyenne de Césaro.

Th : [Soit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{u_i}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

App : • Soit $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0>0$: $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.
• $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$, $u_0>0$: $u_n \sim \frac{2}{n}$.

e) Utilisation de suites adjacentes.

Ex : Développement asymptotique de la série harmonique.

f) Formule d'Euler - Mac Laurin.

①

Th. : Quitte à restreindre I à $[a-r, a+r]$, $r>0$, on suppose que $f' \neq 0$ sur I. On pose $M = \max_I \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|$ et $h = \min\left(\frac{1}{M}, r\right)$. Alors pour tout $x \in [a-h, a+h]$, $|\varphi(x) - a| \leq M|x-a|^2$ et pour tout point initial $x_0 \in [a-h, a+h]$, $|x_p - a| \leq \frac{1}{M}(|x_0 - a|M)^{2^p}$.

Ex : Soit $f(x) = x^3 - 4x + 1$, on a $\varphi(x) = \frac{2x^3-1}{3x^2-4}$. En 3 itérations, on obtient les valeurs $a_0 = -2{,}114907541$; $a_1 = 0{,}254101688$; $a_2 = 1{,}860805853$, i.e. des valeurs approchées à 10^{-9} près environ.

3) Minimisation de fonctions et nombre d'or.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable / $f''(p) > 0$ $\forall p \in [a,b]$. Alors $\exists c \in [a,b]$ / $f'(c) = 0$, et c est l'unique minimum de f.

But : Localiser c.

Déf. : On appelle suite de Fibonacci la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Lem. : (i) u_n est croissante ; (ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or)

Prop. : $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$.
(i) $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow x_1 \leq c < b$ (ii) $f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow a < c \leq x_2$.

a) 1ère méthode : nombres de Fibonacci :

Th : $\varepsilon > 0$. On peut localiser c dans un intervalle de longueur $\leq \Delta_n$, $\Delta_n = \frac{b-a}{u_{n+1}} + \varepsilon$, avec seulement n évaluations de f.

b) 2ème méthode : nombre d'or.

Th. : On peut localiser c dans un intervalle de longueur $\leq \delta_n$, $\delta_n = (b-a)\Phi^{-n}$, avec seulement n évaluations de f.

c) Comparaison des deux méthodes.

Th. : Si n est suffisamment grand, $\frac{\delta_n}{\Delta_n} \simeq 1{,}17$.

III - Approximation diophantienne.

[illegible] le mieux possible.

1) Cas des nombres algébriques.

Th. : (Liouville) x algébrique réel de degré $d \geq 2$: $\exists c > 0$ / $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}$.

Th. : (Roth) Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ algébrique, $\forall \alpha > 2$, $\exists c > 0$ / $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^\alpha}$.

Cr. : (Critère de transcendance)
Si $x \in \mathbb{R}$ et $\exists \alpha > 2$, $c > 0$ / $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{c}{q_n^\alpha}$ pour une infinité de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$, alors x est transcendant.

Rq : Un nombre algébrique ne peut pas être approché aussi vite que l'on veut par une suite de rationnels !

2) Fractions continues.

Déf. : Soit $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}\setminus\{0\}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$ $(a_0 \in \mathbb{Z})$ $:= a_0 + \frac{1}{a_1}\,\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.
La suite R_n définit une fraction continue.
Si R_n converge, la fraction continue est dite convergente.

Th. : $\forall n \geq 0$, $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ où les suites P_n et Q_n sont définies, pour $n \geq -1$, par : $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$ et vérifient $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$:
$$\begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}$$

Th. : [DV] Soit $(c_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{N}$ telle que $c_n \geq 2$ $\forall n \geq 1$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{c_n c_{n+1}}$ converge. Alors $\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} + \dots + \frac{1}{c_n} \dots$ converge.

Prop. : Une fraction continue est finie ssi elle est rationnelle.

Prop. : Tout réel est développable en fraction continue.

Ex. : (Développement de e)
$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \dots$$

Rem. :
- Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, le développement est unique.
- Si $x \in \mathbb{Q}$, deux fractions continues représentent x si et seulement si : $a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}-1} + \frac{1}{1} = x$.

Déf. : On appelle meilleure approximation de $x \in \mathbb{R}$ tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que si $\frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ avec $q' < q$, alors $\left|x - \frac{p'}{q'}\right| > \left|x - \frac{p}{q}\right|$.

Th. : Chaque meilleure approximation de $x \in \mathbb{R}$ est un R_n pour un certain n ou sa limite.

Th. : $f \in C^{q}([\alpha,\beta])$, $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ et $T(f) = \frac{1}{2}f(\alpha) + f(\alpha+1) + \dots + f(\beta-1) + \frac{1}{2}f(\beta)$.
Alors $T(f) = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \sum_{m=1}^{q} \frac{b_{2m}}{(2m)!}\left(f^{(2m-1)}(\beta) - f^{(2m-1)}(\alpha)\right) - \int_\alpha^\beta \frac{B_{2q}(x)}{(2q)!} f^{(2q)}(x)dx$

où $B_p(x) = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} b_m x^{p-m}$ et $b_p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} b_m$ $(p \geq 2)$, $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$.

Cor. : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) / \exists m_0 \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R} / \forall m \geq m_0$, $f^{(m)}(x)$ est de signe constant sur $[x_0, +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} f^{(m)}(x) = 0$.
Alors $\exists C$ constante indépendante de n et q $/ \forall n \geq x_0$ et $\forall q > \frac{m_0}{2}$:
$S_n(f) = C + \frac{1}{2}f(n) + \int_0^n f(x)dx + \sum_{m=1}^{q-1} \frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(n) + R_{n,q}$,
où $R_{n,q} = \theta \times \frac{b_{2q}}{(2q)!} f^{(2q-1)}(n)$, $\theta \in [0,1]$ et $S_n(f) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

Ex. : (Formule de Stirling avec reste)
$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{\theta}{1680n^7}\right)$

3) Exemples de suites divergentes.

Ex. : • $u_n = (-1)^n$ • $u_n = e^{\frac{2i\pi n}{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans S^1.

Th. : (Critère de Weyl)
Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de $[0,1]$. $\forall 0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose :
$X_n(a,b) = \text{card}\{k \in \{1,\dots,n\} / u_k \in [a,b]\}$. Il y a équivalence entre :
(i) $\frac{X_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b-a$ $\forall (a,b) \in [0,1]^2$.
(ii) $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)dt$.
(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$.
Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie dans $[0,1]$.

Ex. : Si $\theta > 0$, $(n\theta)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 ssi $\theta \notin \mathbb{Q}$.

4) Comportements chaotiques. § original

Déf. : $f : I$ segment de $\mathbb{R} \to I$ continue. Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$, $1 \leq k \leq n-1$, on dit que x est un point n-périodique.

Th. : (Sarkovsky)
Si $f : I \to I$ continue, I segment de $\mathbb{R}$, admet un point 3-périodique, alors il existe un point n-périodique $\forall n \in \mathbb{N}$.

App. : Dans ce cas, $u_{n+1} = f(u_n)$, se comporte différemment selon u_0.

Déf. : $f : [0,1] \to [0,1]$ est dite chaotique si :
(i) {points périodiques de f} est dense dans $[0,1]$.
(ii) f est topologiquement transitive : $\forall U, V \subset [0,1]$, $\exists k > 0 / f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.
(iii) f est sensible aux conditions initiales :
$\exists \delta > 0 / \forall x \in [0,1]$, $\forall V$ voisinage de x, $\exists y \in V$, $\exists n > 0 / |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Rq. : Si f est continue, (i) et (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Ex. : La fonction tente définie par $T(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$ est chaotique.

App. : $u_{n+1} = T(u_n)$ a un comportement aléatoire selon u_0.

II. Méthodes numériques et vitesse de convergence.

1) Approximation de points fixes.

Th. : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, une application contractante (i.e. $\exists k < 1 / f$ est k-lipschitzienne). Alors f admet un unique point fixe $a \in I$. De plus, $\forall x_0 \in I$, $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Rq. : Estimation de la vitesse de convergence :
$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $|x_p - a| \leq k^p |x_0 - a|$: la convergence est linéaire.
(Le nombre de décimales exactes de x_p est $\simeq$ proportionnel à p)

Ex. : $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est contractante d'unique point fixe
$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$

2) Méthode de Newton.

On cherche à évaluer la racine a de $f(x) = 0$, $f : I \to \mathbb{R}$, C^1. Si $x_0 \in I$, localement, on approche f par sa tangente en x_0, $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.
Supposons maintenant f de classe C^1 tel que $f'(a) \neq 0$. On peut alors définir $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. C'au voisinage de a, et $\varphi(a) = a$ est l'unique point fixe de φ. ②

$\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{u_0^\alpha}+\frac{1}{u_n^\alpha}\right) \to \lambda n$

Références :

* GOURDON – "Analyse".
* DEMAILLY – "Analyse numérique et équations différentielles".
* CIARLET – MIARA – THOMAS – "Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation".
* FRANCINOU – GIANELLA – NICOLAS – "Oraux X-ENS Analyse 1".
* HOLMGREN – "A first course in discrete dynamical systems".
* DUVERNEY pr la dernière partie.

[Leichtnam-Schauer, exos X-ENS].

$\begin{cases} u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ $x \mapsto x e^{-x}$.

- $u_0 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.
- $u_0 < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$. (réc)

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} > 1$: $(u_n) \searrow$

Supposons que $u_n \to \ell \neq \infty$, $\ell < 0$

$\ell = \ell e^{-\ell} \Rightarrow \ell = 0$ abs.

donc $u_n \searrow -\infty$

- $u_0 > 0$: $(u_n) \searrow$ minoré, son seul pt fixe est zéro, donc $u_n \to 0$
- Vitesse de cvg de u_n vers zéro ?

$\exists ? \alpha \mid v_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \longrightarrow \lambda \neq 0$

en effet, Cesaro :

$\left.\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k}_{-\frac{1}{u_0^\alpha}+\frac{1}{u_n^\alpha}} \to \lambda\right] \Rightarrow u_n \sim \left(\frac{1}{n\lambda}\right)^{1/\alpha}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} \longrightarrow 1 \Rightarrow u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$

$f(x) = x e^{-x} = x\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$.

$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{u_{n+1}^\alpha u_n^\alpha} \sim \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{u_n^{2\alpha}}$

En prenant $\alpha = 1$, $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \longrightarrow 1$

donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

* Cas général :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$\exists a > 0, \alpha > 0 \mid f(x) = x\left[1 - a x^\alpha \varphi(x)\right]$ où $\varphi \in C^0$ et $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1$

Alors :

$\exists \theta > 0 \mid \forall u_0 \in [0, \theta]$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est cvg vers zéro et, de plus, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\alpha a n}\right)^{1/\alpha}$

$\exists \rho > 0 \mid \forall x \in [0, \rho]$, $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq \frac{3}{2}$

$1 - a x^\alpha \varphi(x) \leq \underbrace{1 - \frac{1}{2} a x^\alpha}_{\geq 0 \text{ ssi } \left(\frac{2}{a}\right)^{1/\alpha} \geq x}$

$\forall x \in \left[0, \inf\left(\rho, \left(\frac{2}{a}\right)^{1/\alpha}\right)\right] = I$

$0 \leq f(x) \leq x$ et $\hat{x} < x$ car $\varphi \underset{0}{\to} 1$

$u_0 \in I \Rightarrow \forall n, u_n \in I$ et $u_{n+1} \leq u_n$

$u_n \searrow$ minorée

0 est pt fixe et $f(x) < x$

donc unique pt fixe : $u_n \searrow 0$