Chyronoff

n°203 Utilisation de la notion de compacité

① Généralités

① Propriété de Borel-Lebesgue

[Gou] p. 27 **Déf**: Un espace topologique séparé E est dit compact si $E = \bigcup_{i\in I} O_i$ avec O_i ouverts de E il existe $J \subset I$ fini tel que $E = \bigcup_{i\in J} O_i$.

[Gou] p. 31 **Prop**: Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente d'un espace topologique séparé E, x sa limite. Alors $K = \{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ est compact.

[Nou] p. 7 **1er Thm de Dini**: Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions continues définies sur un espace métrique compact E et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction continue sur E, alors la convergence est uniforme.

Appl: L'application $t \mapsto \sqrt{t}$ est limite uniforme de polynômes sur $[0,1]$.

② Propriété de Bolzano-Weierstrass

[Gou] p. 28 **Déf**: Un espace métrique E est dit compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut en extraire une sous suite convergente dans E.

Prop: Les fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont les compacts de $\mathbb{R}$.

[Gou] p. 33 **Appl**: * Distance entre 2 compacts K_1, K_2 d'un espace métrique E : $\exists (x_1,x_2)\in K_1\times K_2$ tels que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$.

[Ser] p. 78 * La décomposition polaire est un homéomorphisme de $Gl_n(\mathbb{C})$ dans $HDP_n \times U_n$)

③ Extraction diagonale

[Gou] **Thm**: Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$

Prop: Soit $p \in [1,+\infty[$, $l^p = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p)^{1/p} < +\infty\}$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum \varepsilon_n^p < +\infty$. $K = \{(b^k)_{k\geq 0} \in (l^p)^{\mathbb{N}}\ \forall n,k, |a_n^k| \leq \varepsilon_n\}$.
K est une partie compacte de l^p.

Thm de Helly: Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions croissantes d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in I$ $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est bornée. Alors il existe une sous suite de (f_n) qui converge simplement. [H.L.] p. 1

Appl: Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que [Cot] p. 114
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists K$ compact de $\mathbb{R}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ $p_n(K) \geq 1-\varepsilon$. Alors $(p_n)_{n\geq 0}$ admet une sous suite qui converge étroitement.

Ⅱ Fonction continue sur un compact

① Propriétés topologiques

Prop: Soient (E,d) un espace métrique compact et (F,δ) un espace métrique, $f: E\to F$ continue. Alors $f(E)$ est compact. [Gou] p. 3

Appl: Soit (E,d) un espace métrique compact et $f: E\to E$ une application continue vérifiant $\forall (x,y)\in E^2$ $d(f(x),f(y)) \geq d(x,y)$. [Gou] p. 3
Alors f est une isométrie bijective.

Déf: Une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite propre si l'image réciproque par f d'un compact est un compact. [Z.Q] p. 4

Thm d'Hadamard: Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1. On a équivalence entre :
(i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
(ii) f est propre et le déterminant du jacobien de f est partout non nul.

Thm d'homéomorphisme: Soient E un espace métrique compact, F un espace métrique et $f: E\to F$ bijective continue. Alors f est un homéomorphisme [Nou] p. 7

Appl: * Toute injection de S^1 dans S^1 continue est un homéomorphisme [Bon] p. 4

③ Extrema

Prop: Soit $f: (E,d)\to\mathbb{R}$ continue, où (E,d) est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. [Gou] p. 31

Appl: * Soit (E,d) un espace métrique compact et $f: E\to E$ vérifiant : [Gou] p. 34
$\forall (x,y)\in E^2$ $x\neq y$ $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$
Alors f admet un unique point fixe.

(Gou) p. 34 * Distance d'un fermé à un compact en dimension finie :
Soient K et F respectivement un compact et un fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors
$\exists x \in K \; y \in F \quad d(x,y) = d(K,F)$

Rq : faux en dimension infinie : $E = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée$\}$ munie $\|\cdot\|_\infty$.
$X_n = (0, \dots 0, 1+\frac{1}{2^n}, 0 \dots)$ $\quad F = \{X_n, n \geq 0\}$ est fermé. $K = \{0\}$ est compact.
$d(F,K) = 1 \qquad d(K, X_n) = 1 + \frac{1}{2^n} > 1$.

(Gan) p. 49 * Thm de Perron-Frobenius : Soit A une matrice positive $(a_{ij} > 0)$ irréductible. $\rho(A) = \max(|\lambda|, \lambda \in Sp(A))$. Alors
(i) $\rho(A) > 0$
(ii) $\rho(A)$ est valeur propre simple associée à un vecteur propre de coordonnées strictement positives.

③ Théorème de Heine

(Pom) p. 60 Thm : Soit f une application continue de l'espace métrique compact (E,d) dans l'espace métrique (F,δ). Alors f est uniformément continue.

Ex : Toute fonction continue périodique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue.

Appl : * Une fonction continue f du segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans un evn E est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.
(Pom) p. 62 * continuité, dérivabilité des intégrales à paramètre.
(Gou) 225 * Thm de Weierstrass : Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.
(Nou) p. 3 * 2ème Thm de Dini : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions croissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.

④ Point fixe

(Nou) p. 102 Thm de Brouwer : Soient E un espace vectoriel vectoriel normé de dimension finie et C une partie convexe compacte de E. Alors toute fonction continue $f : C \to C$ a un point fixe.

Thm de Schauder : Soient E un espace vectoriel normé de dimension infinie, C un convexe fermé de E et $f : C \to C$ continue telle que $f(C)$ soit relativement compacte. Alors f admet un point fixe.

III Espace des fonctions $C^0(X,Y)$ où X métrique compact et Y métrique complet

① Thm d'Ascoli [Z.Q. p. 151]

Déf : Une partie A de $C^0(X,Y)$ est dite équicontinue si
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in A \; \forall (x,y) \in X^2 \; d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

Thm : Soit A une partie de $C^0(X,Y)$ avec Y compact. Il y a équivalence entre :
(i) A est équicontinue
(ii) A est relativement compacte.

Appl : * Thm de Cauchy-Peano : [C.M.] p. 59
On suppose que la fonction f est continue dans un voisinage du point (t_0, y_0) dans $I_0 \times \mathbb{R}^n$, alors il existe un intervalle J_0, voisinage de t_0 dans I_0 et une fonction $y \in C^1(J_0)$ tels que :
$\forall t \in J_0, \quad y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$

* Thm de Montel : Soit $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$. Soit δ une métrique pour la convergence uniforme sur tous compacts. On a équivalence entre :
(i) A est localement bornée.
(ii) A est relativement compacte dans $(H(\Omega), \delta)$

② Théorème de Stone-Weierstrass [H.L.] p. 29

Thm : Toute sous-algèbre de $C^0(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$

Appl : L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$

③ Idéaux de $C^0(X)$ [G.T.] p. 134

Pour $x \in X \quad \varphi : C^0(X) \to X,\; f \mapsto f(x)$. On note $E_x = \operatorname{Ker} \varphi$

Prop : Les idéaux maximaux de $C^0(X)$ sont les E_x pour $x \in X$.

(IV) Compacité et espaces vectoriels normés

① Dimension finie

(Gou) p.49 **Thm**: En dimension finie, les normes sont équivalentes.

Cor : des compacts d'un evn de dimension finie sont les fermés bornés.

(Nou) p.7 **Thm de Riesz** : Soit E un evn. Pour que E soit de dimension finie, il faut et il suffit que la boule unité de E soit relativement compacte.

(G.T) p.137 **Appl**: * Soit V un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$ et ne contenant que des fonctions C^1. Alors V est de dimension finie.

· D'Alembert - Gauss (Gourdon)

② Opérateurs compacts [H.L.] p.186.

Déf: On appelle opérateur compact de E dans F toute application linéaire continue pour laquelle l'image de la boule unité fermée de E est relativement compacte dans F.

Ex: * les opérateurs continus de rang fini, c'est-à-dire dont l'image est de rang fini, sont des opérateurs compacts.

* Soient (X,Y) deux espaces métriques compacts, $K \in \mathcal{C}(X\times Y)$, et μ une mesure positive, alors:

$$T_K : C(Y) \longrightarrow C(X)$$
$$f \longmapsto T_K f : x \longmapsto \int K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

est un opérateur compact.

Prop: Soit T un opérateur compact de E dans E, alors $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension finie.

Ref:

* [Gou] : Gourdon Analyse
* [Nou] : Noudin Agrégation de Mathématiques
* [Ser] : Serre Les matrices
* [Que] : Queffelec Topologie
* [H.L.] : Hirsch Lacombe Elément d'Analyse fonctionnelle (vieille version)
* [Cot] : Cotterell, ... , Exercice de proba
* [Z.Q.] : Zuily - Queffelec
* [Pom] : Pommellet
* [C.M] : Crouzeix-Mignot : Analyse numérique des équa. diff.
* [G.T] : Gonnord - Tosel : Topologie
* [Gan] : Gantmacher : Théorie des matrices (tome 2)

Voir les sous espaces de C^∞

Hahn - Banach, Convexité