1

Leçon 248. LE JEU DE PILE OU FACE (suite de variables indépendantes de Bernoulli).

Ref : Pile ou face (Emmanuel Lesigne)
calcul des probabilités (Foata Fuchs)
ouvrage Dacunha Castelle

intro : On souhaite construire un modèle probabiliste d'une partie de pile ou face (suite finie ou infinie de lancers indépendants)

I. LOIS RELATIVES AU JEU DE PILE OU FACE

1. SUITES FINIES. LOIS DE BERNOULLI, LOI BINOMIALE.

Def : • X v.a.r suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si $P_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$

on note : $X \sim \mathcal{B}(p)$

• Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une suite finie de v.a. iid telles que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $S = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi Binomiale de paramètres n et p,

i.e : $P(S=k) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on note : $S \sim \mathcal{B}(n,p)$

prop : • si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors : $E[X] = p$ $Var(X) = p(1-p)$

$\varphi_X(t) = (1-p) + pe^{it}$, $G_X(t) = (1-p) + pt$

• si $S \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors : $E[S] = np$ $Var(S) = np(1-p)$

$\varphi_S(t) = \left((1-p) + pe^{it}\right)^n$, $G_S(t) = \left[(1-p) + pt\right]^n$

2. LE PROBLEME DES SUITES INFINIES

• S'intéresser au temps du nième pile nécessite une suite infinie de v.a. de Bernoulli.

• construire une mesure de probabilité sur $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que pour chaque i, la ième marginale soit la loi uniforme sur $\{0,1\}$ n'est pas évident car Ω n'est pas dénombrable.

Théorème : (Kolmogorov) [Barbe-Ledoux p. 95]

soit $(E_i, \mathcal{B}_i, \mathbb{P}_i)_{i \geq 1}$ une famille d'espaces probabilisés

$\Omega = \prod_{i \geq 1} E_i$, $\mathcal{F}$ tribu produit des $\mathcal{B}_i$.

Alors : $\exists!$ Q mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ tel que :

$\forall n \geq 1$: $\forall C_n \in \mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n$:

$Q(A) = \mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n(C_n)$ où $A = C_n \times E_{n+1} \times \dots$

application : on peut définir une suite infinie de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli

Cas particulier (sans Kolmogorov) représentation dyadique propre :

$p = 1/2$ $\Omega = [0,1]$ $\mathcal{F}$ = boréliens de $[0,1]$; $\mathbb{P}$ = mesure de Lebesgue.

$\forall \omega \in [0,1]$ $\omega = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \varepsilon_i(\omega)$

et $\forall n \geq 1$: $\varepsilon_n : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ est une v.a. de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sont indépendantes.

3. LOI GEOMETRIQUE, LOI BINOMIALE NEGATIVE

On considère la v.a. de "premier succès" : $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$ (temps du 1er pile)

prop : T suit une loi géométrique de paramètre $p > 0$ (notée $\mathcal{G}(p)$)

$\forall n\geq 1$: $\mathbb{P}[T=n]=p(1-p)^{n-1}$; $\mathbb{E}[T]=\frac{1}{p}$ $\quad Var(T)=\frac{1-p}{p^2}$

$$G_T(t)=\frac{tp}{1-t(1-p)}$$

- On cherche à étudier le temps du m ième pile : $v=\inf\{n\geq 1, S_n=m\}$ donc $v=m+k$ $k\geq 0$

Prop : $\mathbb{P}(V=m+k)=C_{k+m-1}^{k-1}(1-p)^k p^m$

$\mathbb{E}[V]=\frac{m}{p}$ $\quad Var(V)=\frac{m(1-p)}{p^2}$

$$G_V(t)=\left(\frac{pt}{1-t(1-p)}\right)^m$$

V suit donc une loi binomiale negative de paramètre m et p notée $\mathcal{J}_m(p)$.

Rq. La loi géométrique est la loi binomiale négative pour $m=1$.

Prop : $(X_{v+n})_{n\geq 1}$ suit encore une loi de Bernoulli.

II. Comportements asymptotiques. Theoremes limites.

1. Convergence en proba. [PF, p.13, ...]

Prop : inégalité de Bienaymé Tchebychev :
pour $S_n=X_1+\dots+X_n$ où X_i iid $\quad X_1\sim\mathcal{B}(p)$

$$\forall\varepsilon>0 : \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

en particulier (loi faible des grands nombres) : $\frac{S_n}{n}-p\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}0$

application. Polynômes de Bernstein :
soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ C^0 $\quad B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k$

Alors, $B_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty}f$

Rq : la majoration est peu précise (pour l'inégalité de Tchebychev)
ex : $p=\frac{1}{2}$ $\quad\varepsilon=0,1$ $\quad n=25\Rightarrow\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}=1$

Prop : Grandes déviations.
$\forall p\in[0,1]$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists R_+(p,\varepsilon)$ et $R_-(p,\varepsilon)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq e^{-nR_+(p,\varepsilon)}+e^{-nR_-(p,\varepsilon)}$$

2. Convergence presque sûre

Cor : Loi forte des grands nombres
$(X_n)_n$ iid $X_i\sim\mathcal{B}(p)\Rightarrow\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}ps}p$

application. estimation de p par $\frac{S_n}{n}=\hat{p}$ (moyenne empirique)

nombres normaux : (ici en base 10)

def : $\omega\in[0,1]$ $\quad\omega=\sum_{i\geq 0}\frac{1}{10^n}X_n(\omega)$ ($X_n(\omega)$ donne la $n$ième décimale de ω)

ω est dit normal ssi $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{1}_{\{X_i(\omega)=k\}}=\frac{1}{10}$

Prop : presque tout nombre est normal : en effet (LFGN) : $\forall k\in\{0,\dots,9\}$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{1}_{\{X_i(\omega)=k\}}\xrightarrow[\mathbb{P}ps]{N\to+\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_i(\omega)=k\}}\right]=\mathbb{P}(X_i(\omega)=k)=\frac{1}{10}$$

Hardy Littlewood : (appliquer les grands écarts pour $\sqrt{n\, \ell_n(n)}$ et l'équivalent : $h_+(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2p(1-p)} + O(\varepsilon^2)$; $\varepsilon \to 0$)

presque sûrement, quand $n \to +\infty$,

$$S_n - np = O(\sqrt{n\, \ell_n(n)})$$

Thm : Logarythme itéré : on a presque sûrement :

$$\limsup_n \frac{S_n - np}{\sqrt{2p(1-p)\, n\, \ell_n(\ell_n(n))}} = +1$$

$$\liminf_n \frac{S_n - np}{\sqrt{2p(1-p)\ell_n(\ell_n(n))}} = -1$$

4. CONVERGENCE EN LOI :

Thm : TCL pour la variable centrée :

soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $a < b$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \in]a,b[\right) \xrightarrow{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

i.e : $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Cor : . on approche une binomiale par une $\mathcal{N}(0,1)$

. on peut construire un intervalle de confiance approché pour p :

$$\lim \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{\alpha \sqrt{\frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \frac{S_n}{n} + \frac{\alpha \sqrt{\frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}}{\sqrt{n}}\right.$$

Thm. Loi des évènements rares : approximation binomiale - Poisson.

Soit X_n une suite de v.a. binomiales $B(n, p_n)$ telles que :

$$n p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$$
$$p_n \to 0$$

Alors la suite (X_n) converge en loi vers une variable de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

III. MARCHES ALEATOIRES :

Jeu de pile ou face : pile rapporte 1€, face fait perdre 1€.

gain après n lancers : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i = 2Y_i - 1$

avec $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ iid de loi $B(p)$.

1. RETOUR EN ZERO :

on suppose que le joueur a une fortune infinie et on étudie ses possibilités de retour à un gain nul :

prop. $p = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup (S_n = 0)) = 1$

$p \neq 1/2 \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup (S_n = 0)) = 0$

2. RUINE DU JOUEUR :

le joueur a une fortune initiale $a < +\infty$ et cesse de jouer dès qu'il a gagné la fortune b de son adversaire ou qu'il a perdu sa fortune a :

$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = -a$ ou $S_n = b\}$ le temps d'arrêt correspondant.

$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$

la formule de Wald : $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[T] = (2p-1)\mathbb{E}[T]$ (si $\mathbb{E}[T] < +\infty$)

et $\mathbb{E}[(\frac{q}{p})^{S_T}] = 1$ permettent de déduire :

$p = q = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}[S_T = -a] = \frac{b}{a+b}$, $\mathbb{P}[S_T = b] = \frac{a}{a+b}$

$p \neq q \Rightarrow \mathbb{P}[S_T = -a] = \frac{1 - (\frac{q}{p})^b}{(\frac{p}{q})^a - (\frac{q}{p})^b}$; $\mathbb{P}[S_T = b] = \frac{(p/q)^a - 1}{(p/q)^a - (q/p)^b}$