215 Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et Applications

I) Définitions et Propriétés [GOU]

Idée du Calcul Différentiel :

accroissement fonction = terme linéaire en l'accroissement de la variable + terme correctif

on peut mettre en dessous

Notation : A partir de maintenant U sera toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un e.v. normé de dimension finie.

1) Définition et Exemples :

il oublie c'est ds le titre !

Def : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$. f est dite différentiable au point $a \in U$ s'il existe $D_a f \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, F)$ t.q pour tout h tq $a+h \in U$ on ait :
$f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$

on appelle application différentielle def :
$Df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$
$a \to D_a f$

si Df est continue alors f est dite C^1.

Rqs : • si $U \subseteq \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors
$D_a f(h) = f'(a) \cdot h$

• si f est différentiable en a alors f est continue en a.

Exemples : • Si f est linéaire alors $\forall a$, f est différentiable en a et $D_a f = f$.

• Si f est bilinéaire alors $\forall (a,b)$, f est différentiable en (a,b) et
$D_{(a,b)} f(h,k) = f(h,b) + f(a,k)$. + multilin

exple : le produit scalaire

• $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$X \quad Y \to XY$
$D_{(X_0,Y_0)} f(H,K) = X_0 K + H Y_0$

• $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$
$M \to M^{-1}$
$D_{M_0} f(H) = -M_0^{-1} H M_0^{-1}$

• $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x \to \|x\|^2$ où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.

$D_{x_0} g = 2\langle x_0, \cdot \rangle$

• Une norme n'est jamais différentiable en 0. qu'ils peut savoir le démontrer.

2) Interprétation géométrique [OA]

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$
$Y = f(a) + D_a f(x-a)$, $(Y,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$
est l'espace tangent au graphe de f en a.

3) Propriétés [GOU]

a) les fonctions différentiables sur $U \subset \mathbb{R}^m$ à valeurs dans F forment un $\mathbb{R}$-ev et $\forall a \in U$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ tout très semblable : somme ⊕ produit ⊕ composé
$D_a(f + \lambda g) = D_a f + \lambda D_a g$.

b) composition : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$ t.q $f(U) \subseteq V$. Si f est différentiable en a et g l'est en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D_a g\circ f = D_{f(a)} g \circ D_a f$.

Csqce : le produit de deux fonctions différentiables en a, f et g est différentiable en a et
$D_a fg = g(a) D_a f + f(a) D_a g$.

• $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x \to \|x\|$ $\|\cdot\|$ est euclidienne

f est différentiable $\forall x \neq 0$ et
$D_{x_0} f(h) = \dfrac{\langle x_0, h\rangle}{\|x_0\|}$

4) Dérivées selon un vecteur et dérivées partielles

Def : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$ si la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $t \to f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$ alors f est dite dérivable en a selon le vecteur v et $f'_v(a) = \varphi'(0)$
$= \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ \neq}} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ est la dérivée de f en a selon le vecteur v.

Prop : Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur v et $f'_v(a) = D_a f(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$

Rq : la réciproque est fausse :
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to \dfrac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon
admet une dérivée selon tout vecteur mais n'est même pas continue.

Def : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F$, $a \in U$, $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si pour $i \in [\![1,n]\!]$ f admet une dérivée en a selon e_i alors f admet une dérivée partielle en a d'indice i notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a)$ (D.P.)

Prop : f différentiable en $a \Rightarrow f$ admet des DP en a $\forall i$ et $D_a f(h) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i$ ça c'est qd on est à valeur réelle

on note $\operatorname{grad}_a f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$

et $D_a f(h) = \operatorname{grad}_a f \cdot h$. ou

Application : $D_M \det(H) = Tr({}^t\mathrm{Co}M \cdot H)$

lemme fondamental : Soit $f : [a,b] \to F$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si $\forall t \in]a,b[$ $\|F'(t)\| \leq g'(t)$ alors $\|F(b) - F(a)\| \leq g(b) - g(a)$
(Gou p73)

Thm : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F$. Si toutes les DP existent et sont continues en a alors f est différentiable en a.

Réciproque fausse : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to xy \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 sinon

pas mal

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Def : sous réserve d'existence on peut définir par récurrence sur p, une DP d'ordre p. $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right)$

$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F$ est dite C^p si Df est C^{p-1} $\Leftrightarrow$ toutes ses dérivées partielles existent et sont continues jusqu'à l'ordre p.

Thm de Schwarz : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ t.q f admette des DP d'ordre 2 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en a. Alors elles sont égales en a.

Rq : l'hypothèse de continuité est nécessaire c.ex : $\begin{cases} f(x,y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

Corollaire : Si f est C^p les DP sont indépendantes de l'ordre. appl : chgt de variable dans les intégrales

Jacobienne et Hessienne

$(e_1, \dots, e_n)$ $(e'_1, \dots, e'_m)$ bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$D_a f$ a pour matrice dans les bases canoniques. $J_a(f) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right]_{i,j}$ appelée jacobienne de f en a.

• si $m = n$, on définit le jacobien de f en a : $|\det J_a(f)|$.

Prop : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ t.q $\varphi(V) \subset U$ $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. φ différentiable en $a \in V$ et f différentiable en $\varphi(a)$. Alors $F = f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et $\frac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a)$

Csqce : la composée de deux fonctions C^p est C^p (en particulier, la somme, le produit).

Def : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La Hessienne de f en $a \in U$ est la matrice $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j}$

$D^2 f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F))$ la différentielle de Df est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice hessienne.

Application : Identité d'Euler mauvaise

$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ différentiable sur U et $k \in \mathbb{R}$. f est k-homogène i.e $f(tx) = t^k f(x), \forall t > 0$. lemme de Rouvière ici

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Leftrightarrow \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x)$

II) Accroissements finis et Formules de Taylor : [GOU]

① Théorème des accroissements finis

$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F$. $(a,b) \in U^2$ t.q $[a,b] \subseteq U$. Si f est continue sur $[a,b]$, différentiable en tout point de $]a,b[$ et s'il existe $M > 0$ t.q $\|D_c f\| \leq M$ $\forall c \in]a,b[$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\| M$.

Csqce : • Si U est convexe, f est différentiable en a et $\|D_a f\| \leq M$ $\forall a \in U$ alors $\forall (a,b) \in U^2$, $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b-a\|$

• Si U est convexe et $Df \equiv 0$ sur U alors f est constante. (connexe plutôt ?)

Application : $f_k : U \to F$

i) f_k converge simplement sur U

ii) les Df_k convergent uniformément sur U. Alors $\lim f_k$ différentiable et $D(\lim_k f_k) = \lim_k Df_k$. [ROU]

csq = l'exponentielle est C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Formules de Taylor : [ROU] bof

Notation : $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ les citer seulement sinon trop de place

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$; $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$

$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_m^{\alpha_m}$

$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{\alpha_m}$

$$\frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha$$

Taylor Lagrange :

$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(c)(h)^{k+1}$ avec $c \in]a, a+h[$

Taylor avec reste intégral :

$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$

Taylor Young :

$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + o(\|h\|^k)$

Application : lemme d'Hadamard [GOU]

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞, $f(0) = 0$

$f(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$ avec $\forall i$ $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞.

Application a) Extrema relatifs [GOU]

Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2

$\exists a / df_a = 0$ (condition nécessaire pour être un extremum) alors $f(a+h) = f(a) + \frac{Q(h)}{2} + o(\|h^2\|)$ où Q est une forme quadratique alors

i) si f admet un minimum (resp max) relatif en a, Q est une forme quadratique positive (resp négative)

ii) Si Q est une forme quadratique def ≥ 0 (resp def ≤ 0). f admet un minimum (resp un maximum) relatif en a

oui

avant

b) Convexité [ROU]

U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ C^2 sur U. Alors f est convexe sur U ssi $D^2 f$ est une forme quadratique positive en tout point.

III) Inversion locale et applications

Thm. $f : U \to \mathbb{R}^p$ C^1. On suppose $\exists a \in U$ / $D_a f$ est un isomorphisme (bicontinu) de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ (donc $n = p$) alors $\exists V$ un voisinage de a et W un voisinage de $f(a)$ t.q

i) $f_{|V}$ est une bijection de V sur W.

ii) son inverse g est C^1 et $\forall x \in W$ [GOU]

$D_{f(x)} g = (D_x f)^{-1}$ [inversion locale].

Applications :

1) $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists V$ un voisinage de l'identité dans $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in V$ $\forall k$, $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$ / $A = B^k$.

2) $\exists V$ un voisinage de l'identité t.q le seul sous groupe de GL_n contenu dans ce voisinage soit $\{I_n\}$. [MT]

3) $S_n(\mathbb{R})$ = les matrices symétriques de taille n. Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, $\exists V_{A_0} \subset S_n(\mathbb{R})$ φ C^1 t.q $\forall A \in V_{A_0}$ $A = {}^t\varphi(A) A_0 \varphi(A)$

Lemme de Morse $U \subseteq \mathbb{R}^n$ [ROU]

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ C^3 avec $0 \in U$ $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de 0 t.q $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = u \in \mathbb{R}^n$ t.q $f(x) = f(0) + u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$.

Corollaire : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 [GOU] si $\forall x$, $D_x f$ est inversible alors f est une application ouverte.

Application : Soit f holomorphe t.q $f'(z) \neq 0$ alors il existe un voisinage de z et un voisinage de 0 tels que f soit un difféomorphisme entre ces deux voisinages, et même soit un biholomorphisme.

Thm d'inversion globale : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ C^1 et injective, il y a équivalence entre les 2 assertions suivantes :

i) $\forall x \in U$, $D_x f$ est inversible (et bicontinue).

ii) $f(U) = V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f^{-1} : V \to U$ est C^1.

Attention, l'injectivité est importante

c-ex. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ n'est pas injective même si sa différentielle est inversible en tout point.

Thm d'inversion globale holomorphe

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ [ROU] $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et injective sur U. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est un difféomorphisme holomorphe de U sur $f(U)$.

Thm d'Hadmard-Levy [DVPT] [ZQ]

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - C^2 alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) f est un difféomorphisme

ii) f est propre (l'image réciproque de tout compact est un compact) et $\forall x$, $D_x f$ est inversible.

Rq : Dans le cas de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pour étudier l'inversibilité de la différentielle, on étudie le jacobien.

Thm des Fonctions Implicites [OA]

Soit U un ouvert de $E \times F$ et $(a, b) \in U$. $f : U \to G$ ($\dim G = \dim F$) C^k t.q $f(a, b) = 0$

$y \mapsto f(a, y)$ est différentiable en b i.e. $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ existe, si cette différentielle est un isomorphisme entre F et G alors il existe un voisinage ouvert $U_a \times U_b$ de (a, b) et $\varphi : U_a \to U_b$ C^k t.q

$\forall (x, y) \in U_a \times U_b$ $\left(f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x) \right)$

Applications [OA]

1) $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. $\exists \varphi$ définie sur U un voisinage de P_0 dans un voisinage V de x_0 C^∞ t.q $\forall P \in U$, $\forall x \in V$ $P(x) = 0 \iff \varphi(P) = x$

$\hookrightarrow$ csqce : $S_n = \{$polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples$\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Thm des extrema liés [DVPT] [GOU]

$g_1, \dots g_r, f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1 $\Gamma = \{x \mid \forall i \; g_i(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en a, alors si les $(dg_{i,a})$ sont linéairement indépendants alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + \dots + \lambda_r dg_{r,a}$

Applications :

moyenne arithmétique $\leq$ géométrique

• $q(x) = {}^t x A x$ avec $A \in S_n(\mathbb{R})$ admet un max sur S_{n-1} qui est une valeur propre de A.

• $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme $\|\cdot\|_2$ minimale. [GOU]

Références : Gourdon
Rouvière
Objectif Agreg

A notre avis, c'est suffisant pour couvrir le sujet

- Pour le dvpt d'Hadamart Levy → Zuily Quefelec
- Pour un exemple MT = Mneimnée-Testard : Groupes de Lie.

Autres dvpts possibles : - lemme de Morse ⨯
- sous variétés
- thm du rang constant