215 : APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DÉFINIES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Dans toute la leçon n et p seront deux entiers >0, U sera un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de $U \to \mathbb{R}^p$.

I. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES.

I.1. Définition d'une application différentiable.

DÉFINITION - PROPOSITION 1 :

- Soit $a \in U$. On dit que f est <u>différentiable en a</u>, s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que :
  $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $f(a+h) - f(a) = \ell(h) + o(\|h\|)$,
  quand h tend vers 0
- Si ℓ existe, elle est unique et s'appelle la différentielle de f en a. On la note $Df(a)$.
- On dit que f est différentiable sur U, si elle est différentiable en tout point de U.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, si f est différentiable sur U et si l'application $Df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue.

<u>Remarque 1</u> : Cas $n=1$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in U$, f est différentiable en a <u>ssi</u> elle est dérivable en a.

PROPOSITION 2 :
Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

PROPOSITION 3 :
On note f_i, la i-ème composante de f. f est différentiable en a <u>ssi</u> f_i est différentiable en a, $\forall i = 1, \dots, p$.

PROPOSITION 4 :
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soient deux applications : $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$.
On suppose $f(U) \subset V$ et soit $a \in U$.
Si f est différentiable en a et g est diff. en $f(a)$, alors $g \circ f$ est diff. en a et $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.

<u>Application</u> : dérivée des fonctions du type $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$.

PROPOSITION 5 : (Cas particuliers).

- si f est linéaire, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall a \in U$, $Df(a) = f$.
- si f est bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, f est différentiable et $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,
  $$Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2).$$

<u>Exemple</u> (d'applicat° bilinéaires) : l'application [GOU]
$f : M(n,\mathbb{R})^2 \to M(n,\mathbb{R})$ $(X, Y) \longmapsto XY$.
$Df(X_1, X_2)(H_1, H_2) = X_1 H_2 + H_1 X_2$

PROPOSITION 6 :
Si f et $g : U \to F$ sont différentiables en $a \in U$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$ et λf sont différentiables en a et :
$D(f+g)(a) = Df(a) + D(g)(a)$ et $D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a)$.

<u>Exemples d'application de classe $\mathcal{C}^1$</u> :

(i) $f : A \in GL(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ $A \longmapsto A^{-1}$.
$Df(A).H = -A^{-1} H A^{-1}$, $\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$, $\forall H \in M(n,\mathbb{R})$

(ii) $\mathrm{Det} : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. $\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$, $\forall H \in M(n,\mathbb{R})$: [ROU]
$$D(\det)(A).H = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(A).H)$$

I.2. Dérivée suivant un vecteur. Dérivées partielles.

DEFINITION 2 :
Soit $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f a une dérivée en a selon le vecteur v, si l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(a+tv)$ définie sur un voisinage de 0 est dérivable en 0.

PROPOSITION 7 :
Si f est différentiable en a, elle admet des dérivées en a selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et de plus :
$$Df(a).v = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

⚠ La réciproque est fausse : $f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$
n'est même pas continue en $(0,0)$.

DÉFINITION 3 :
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle i-ème dérivée partielle de f en a, la dérivée de f en a selon le vecteur e_i ; on la note $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Remarque : Si f est différentiable en a, les n dérivées partielles de f en a existent et on a :
$\forall h \in \mathbb{R}^n$, $Df(a)\,h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a).h_i$, où $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$

DEFINITION 4 :
Si f est différentiable en a et si $f = (f_1, \dots, f_p)$, on appelle matrice Jacobienne de f en a (notée $J(f)(a)$) la matrice de $Df(a)$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

PROPOSITION 8 :
Si f est différentiable sur U, une C.N.S. pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ est que les n-dérivées partielles soient continues sur U.

Cas $p = 1$.

PROPOSITION 9 :
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiable en $a \in U$. Il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad Df(a).h = (\nabla f(a) \mid h).$$
On l'appelle le gradient de f en a, et on a :
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

I.3. Comparaison différentiabilité - holomorphie.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$; $f = (f_1, f_2)$.
On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 10 :
f est holomorphe en a ssi f est différentiable en a et les conditions de Cauchy sont vérifiées :
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a)$$

II. THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS ; APPLICATIONS.

II.1. Le Théorème des accroissements finis.

THM. 1 :
Si f est différentiable sur U et si le segment $[a,b] \subset U$,
alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df((1-t)a + tb)\| . \|b-a\|$

THM. 2 :
Si U est un ouvert connexe, si f est différentiable sur U, et si $\forall x \in U$, $Df(x) = 0$, alors f est constante sur U.

II.2. Applications du théorème des accroissements finis.

a/ Relation différentiabilité partielle - différentiabilité.

THM 3 :
Pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que f ait ses n dérivées partielles continues sur U.

Exemple : l'application $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b/ Convergence d'une suite de fonctions différentiables.

THM 4 :
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, et soit une suite d'applicat° différentiables $f_n : U \to \mathbb{R}^p$ telle que :
(i) $\exists a \in U$ tq $f_n(a)$ ait une limite.
(ii) $\forall x_0 \in U$, il existe une boule centrée en x_0 dans laquelle $(Df_n)_n$ converge uniformément vers g.
Alors, $\forall x \in U$, la suite $(f_n(x))_n$ a une limite (qu'on note $f(x)$) ; tout point de U possède un voisinage dans lequel la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme ; enfin f est différentiable sur U et $Df(x) = g(x)$, $\forall x \in U$.

Application : $\exp : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

c/ Le théorème d'inversion locale.

THM 5 :
Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $a \in U$ tq on ait $Df(a)$ inversible (i.e. $\det J(f)(a) \neq 0$). Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans U et un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V dans W.

Application 1 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$. Si A est suffisamment proche de l'identité, il existe $B \in M(n,\mathbb{R})$ tel que $A = B^k$.

Application 2 : Le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits (différents de $\{Id\}$).

COR 1 (Théorème d'inversion globale).
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $f(U)$ si, et seulement si, f est injective sur U et $Df(x)$ est inversible, $\forall x \in U$.

d/ Formule du changement de variables.

THM 6 :
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $f \in L^1(V)$. Alors $|\det D\varphi| \, f \circ \varphi \in L^1(U)$ et :
$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x))\,|\det D\varphi(x)|\,dx.$$

Application :
calcul de la loi d'une variable aléatoire fonction d'autre v.a.

Ref : [Cartan] (traite le cas plus gal des Banach) (très inspiré)
· pour point de vue + géométrique [Beck-Malick-Peyré] : objectif agrégation
· voir aussi : [Ramis 3]
[Gourdon]
[Rouvière]