Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $f(x) = 0$. Exemples

I) Principe des méthodes itératives [Pommelet]

- Les méthodes itératives permettent de transformer l'équation $f(x) = 0$ en un problème de point fixe $g(x) = x$ où g est une fonction convenable, puis, partant d'un point x_0 bien choisi, à étudier la suite $x_{m+1} = g(x_m)$.
- Si g est continue et si la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers a, ce nombre vérifie alors $g(a) = a$ et est donc solution de l'équation $f(x) = 0$.
- L'idée consiste en fait à partir d'une valeur approchée grossière de la solution de l'équation $f(x) = 0$ et d'en améliorer la précision par une application itérée d'un algorithme bien choisi.

① Théorème du point fixe [Demailly]

Soit $g : E \to E$ une application k-contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Alors g admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée (x_m) définie par $x_{m+1} = g(x_m)$ converge vers a et une estimation de la vitesse de convergence est :

$$d(x_m, a) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1)$$

② Points fixes attractifs et répulsifs [Demailly]

Déf : Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $g : I \to I$ une application $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in I$ un point fixe de g.

- Si $|g'(a)| < 1$, a est appelé "point fixe attractif de g".
- Si $|g'(a)| > 1$, a est appelé "point fixe répulsif de g".

Prop - Dans le cas où a est attractif, la méthode itérative converge vers ce point. (cf Figure 1)
- Dans le cas où a est répulsif, la méthode ne converge pas vers ce point. (cf Figure 2)
- Dans le cas où $|g'(a)| = 1$, on ne peut rien dire a priori.

Exples : • $g(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\sin'(0) = 1$ et la méthode converge.
• $g(x) = \text{sh}\, x$, $x \in [0, +\infty[$: $\text{sh}'(0) = 1$ et la méthode ne converge pas. (cf Figures 3 et 4)

Rq : Si a est un point fixe répulsif pour g, alors a est un point fixe attractif pour g^{-1}.

③ Ordre de convergence d'une méthode itérative [Schatzman]

Déf : On définit la suite des erreurs d'approximation $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par :
$\forall m \in \mathbb{N}$, $e_m = |x_m - a|$.

Déf : Une méthode itérative est d'ordre $\lambda > 1$ si $\exists\, c$, $c^{te} \geq 0$, tq $e_{m+1} \leq c\, e_m^{\lambda}$.
On dit qu'elle est d'ordre 1 si $\exists\, c < 1$ tq $e_{m+1} \leq c\, e_m$ (pour m assez grand)

Rq : • On parle de convergence quadratique lorsque $\lambda = 2$.
• Dans la pratique, asymptotiquement, x_{m+1} a λ fois plus de décimales exactes que x_m.

Déf : On dit que a est un point fixe superattractif de g s'il est attractif et si la convergence est quadratique.

II) Approximation des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

① La dichotomie [Pommelet]

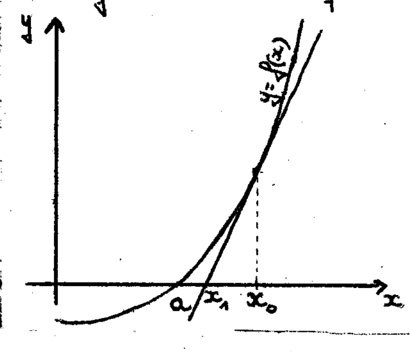
Thm : (valeurs intermédiaires)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ et f continue sur I.
Si $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists\, c \in]a,b[$ tq $f(c) = 0$.

Principe de la méthode : On définit les suites $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par :
$a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall m \geq 1$, si $f(a_m) f\left(\frac{a_m+b_m}{2}\right) < 0$, $\begin{cases} a_{m+1} = a_m \\ b_{m+1} = \frac{a_m+b_m}{2} \end{cases}$
Sinon, $\begin{cases} a_{m+1} = \frac{a_m+b_m}{2} \\ b_{m+1} = b_m \end{cases}$.

Ordre de la méthode : $\forall m \in \mathbb{N}$, $c \in [a_m, b_m]$ et $|b_m - a_m| = \frac{|b-a|}{2^m}$.
La convergence est d'ordre 1 ($c = \frac{1}{2}$).

② La méthode de Newton [Demailly]

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\exists\, a$, $f(a) = 0$.



Principe de la méthode :

On remplace la courbe par sa tangente en x_0. L'abscisse x_1 du point d'intersection de la tangente avec $y = 0$ vérifie :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

C'est une meilleure approximation de a que x_0 en général, et on est donc amené à étudier la suite $x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$.

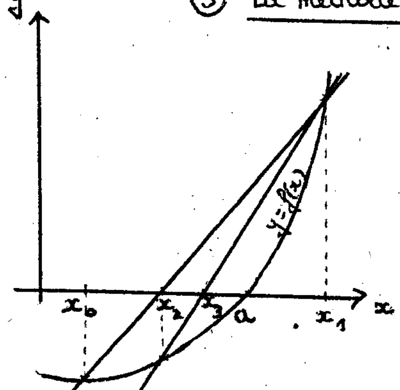
Si f' ne s'annule pas en les zéros de f, il revient au même de chercher les zéros de f et les points fixes de $g : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

<u>Thm</u> : On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = [a-r, a+r]$ et que $f' \neq 0$ sur I. Soit $M = \max_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$ et $h = \min(r, 1/M)$.
Alors pour tout $x \in [a-h, a+h]$, on a $|g(x) - a| \leq M |x-a|^2$ et pour tout point initial $x_0 \in [a-h, a+h]$,
$$|x_p - a| \leq \frac{1}{M} \left(M |x_0 - a| \right)^{2^p}$$

→ La convergence est quadratique.

→ <u>Problème</u> : Cette méthode nécessite le calcul de f', ce à quoi on n'a pas toujours accès.

③ <u>La méthode de la sécante</u> [Demailly]



<u>Principe de la méthode</u> :

On remplace la courbe par la sécante en 2 points, i.e on remplace f' par le taux d'accroissements de f sur un petit intervalle. On est donc amené à étudier la suite
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tau_n}$$
où $\tau_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

<u>Thm</u> : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ et de dérivée $f' \neq 0$ sur $I = [a-r, a+r]$.
Soient $M_i = \max_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$, $m_i = \min_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$, $i = 1, 2$.
$$K = \frac{M_2}{2 m_1} \left(1 + \frac{M_1}{m_1} \right), \quad h = \min(r, 1/K)$$
Soit $(S_p)_p$ la suite de Fibonacci ($S_{p+1} = S_p + S_{p-1}$ avec $S_0 = S_1 = 1$) ; alors $\forall x_0, x_1 \in [a-h, a+h]$ distincts, on a :
$$|x_p - a| \leq \frac{1}{K} \left(K \max(|x_0 - a|, |x_1 - a|) \right)^{S_p}$$

→ La convergence est d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ (un peu moins rapide que Newton) !

→ <u>Problème</u> : Si x_p et x_{p-1} sont trop proches, le calcul de τ_p est erroné. On poursuit alors les itérations avec $\tau_p = \tau_{p-1}$.

④ <u>Cas particulier des polynômes</u>

On considère un polynôme P dont on cherche les racines.

a) <u>Localisation des racines</u> [Oraux X-ENS, Algèbre 1]

<u>Thm</u> : (suites de Sturm) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $S_0 = P$, $S_1 = P'$ puis, aussi longtemps que c'est possible, $S_{i-1} = A_i S_i - S_{i+1}$ avec $\deg(S_{i+1}) < \deg(S_i)$.
Pour x réel, on note $V(x)$ le nombre de changements de signe (stricts) de la suite $S_0(x), \dots, S_p(x)$ lorsque $S_{p+1} = 0$.
$V(x) = \mathrm{Card}\left(\{ (i,j),\ 0 \leq i < j \leq p,\ S_i(x) S_j(x) < 0 \text{ et } S_k(x) = 0 \text{ si } i < k < j \} \right)$
Soit $a < b$. On suppose que $P(a) P(b) \neq 0$.
Alors le nombre de racines distinctes de P dans $[a,b]$ est égal à $V(a) - V(b)$.

b) <u>Méthode de Newton pour les polynômes</u> [Chambert-Loir, Analyse 2]

<u>Thm</u> : Soient $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r$ des réels, $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ des entiers non nuls et $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \xi_i)^{m_i}$.
Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$.

1) On suppose $x_0 > \xi_r$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers ξ_r.

2) De plus, • si $m_r = 1$ alors $\forall c > 0$ $|x_n - \xi_r| = o(c^n)$
(1er développement) • si $m_r > 1$ alors $\exists c \neq 0$ tq $|x_n - \xi_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$

III) <u>Approximation pour les fonctions $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$</u>

$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$. On cherche à approcher a tq $f(a) = 0$.

① <u>La méthode de Newton-Raphson</u> [Demailly]

<u>Idée</u> : On approche f par sa partie linéaire au point x_0.
On résout alors l'équation $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = 0$.
Si $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est inversible, on a une unique solution x_1 tq $x_1 - x_0 = - Df(x_0)^{-1} \cdot f(x_0)$.
On est amené à itérer $x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1} f(x_n) = g(x_n)$.

Thm : On suppose que f est $\mathcal{C}^2$ et que $f(a) = 0$ et $Df(a)$ est inversible. Alors a est un point fixe superattractif de g.

② Résolution de systèmes linéaires [Ciarlet]

$(\mathcal{E})$: $Ax = b$ où $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation

Idée : On décompose A sous la forme $A = M - N$ avec M inversible (et "facile à inverser").

$(\mathcal{E}) \iff x = M^{-1}N x + M^{-1} b$

On est amené à itérer : $x_{n+1} = M^{-1} N x_n + M^{-1} b$.

Thm : La méthode itérative est convergente ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$, où ρ désigne le rayon spectral.

1) Méthode de Jacobi : $\begin{cases} M = D \\ N = E + F \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

Thm : Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode converge.

2) Méthode de Gauss-Seidel : $\begin{cases} M = D - E \\ N = F \end{cases}$

Thm : Si A est à diagonale strictement dominante ou symétrique définie positive, alors la méthode converge.

Rq : La méthode de Gauss-Seidel est plus performante que la méthode de Jacobi.

3) Méthodes de Relaxation :

$\begin{cases} M_\omega = \frac{1}{\omega} D \\ N_\omega = \frac{1-\omega}{\omega} D + E + F \end{cases}$ (Jacobi relaxée) $\qquad$ $\begin{cases} M_\omega = \frac{1}{\omega} D - E \\ N_\omega = \frac{1-\omega}{\omega} D + F \end{cases}$ (Gauss-Seidel relaxée)

Rq : Pour $\omega = 1$, on retrouve les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Thm : [Ostrowski, Reich] Soit A symétrique définie positive. La méthode de relaxation correspondante est convergente ssi $\omega \in]0, 2[$.

b) Méthode de Gradient [Hiriart-Urruty]

Soit A symétrique définie positive.

Idée : On utilise l'équivalence entre résoudre $Ax + b = 0$ et minimiser $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$.

Thm : [gradient à pas optimal] On prend $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \quad \forall k \geq 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d_k = -\nabla f(x_k) \\ t_k = \dfrac{\|d_k\|^2}{\langle A d_k, d_k \rangle} \end{cases}$$

Alors f a un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$, atteint en $\bar{x} = -A^{-1} b$. De plus, la méthode converge vers $\bar{x}$ avec une vitesse exponentielle.

($2^{\text{ème}}$ développement)

ANNEXE

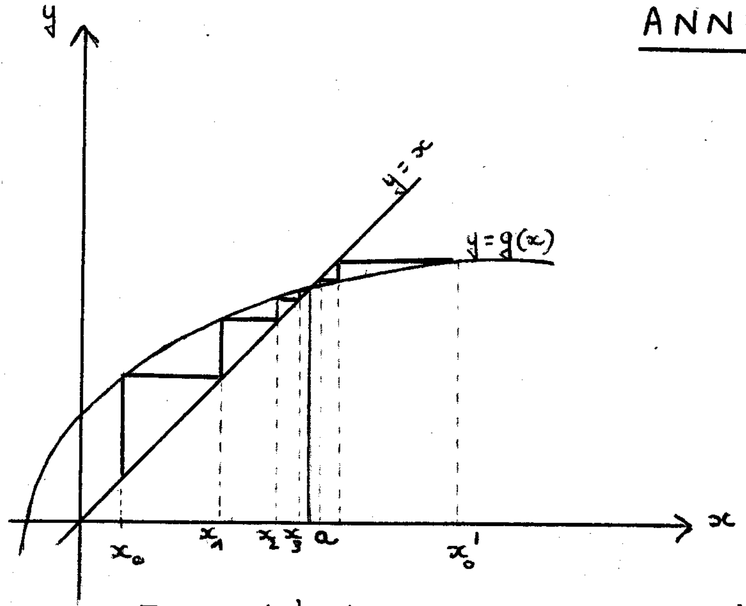


Fig 1 : $|g'(a)| < 1$ (point fixe attractif)
→ la méthode converge

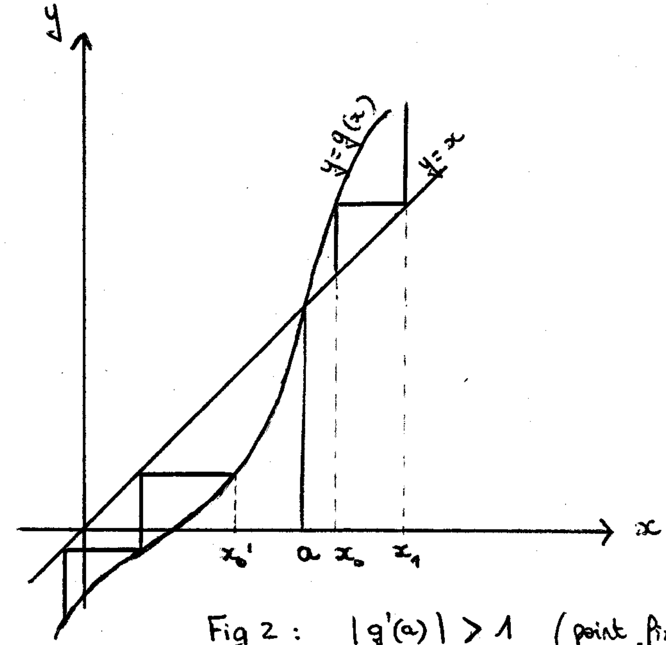


Fig 2 : $|g'(a)| > 1$ (point fixe répulsif)
→ la méthode ne converge pas.

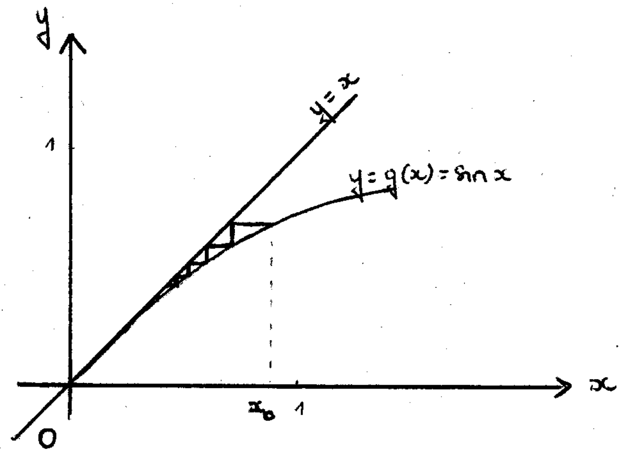


Fig 3 : $g'(0) = 1$
→ la méthode converge

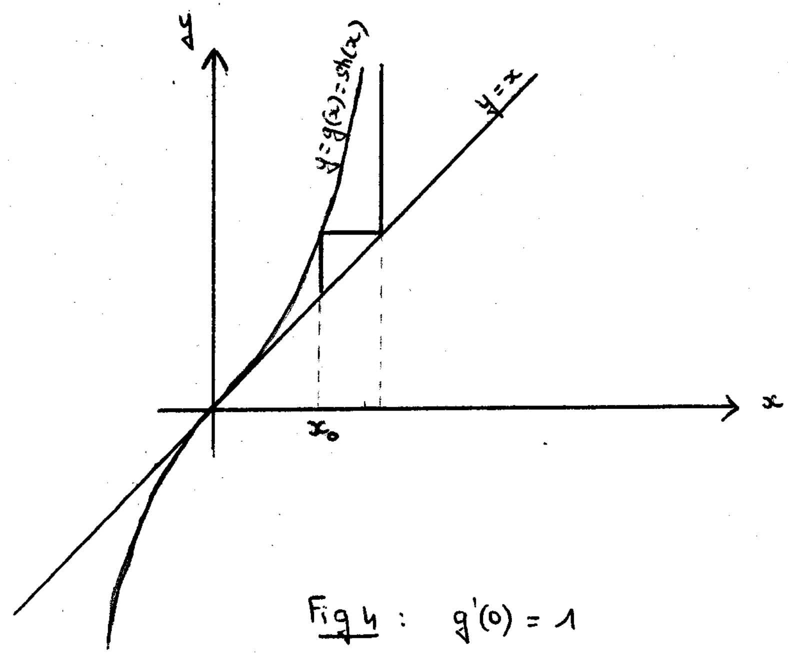


Fig 4 : $g'(0) = 1$
→ la méthode ne converge pas.