217 Espaces vectoriels normés (evn), applications linéaires continues, applications.

E et F désignent deux espaces vectoriels, n un entier naturel.

I Généralités sur les evn

1) Norme [GOU], [HAU].

Def Une norme sur E est une application $N : E : \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \; N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x, y \in E, \quad (x+y) \leq N(x) + N(y)$

(E, N) est un evn, et N définit une métrique $(d(x,y) = N(x-y))$ sur E

Ex $E = \mathbb{R}^n$ avec $\|\cdot\|_\infty$ ou $\|\cdot\|_2$ ...

$E = \mathbb{R}[X]$ avec $\|P\|_2 = (\int |P|^2)^{1/2}$ ou $\|\sum a_i X^i\|_\infty = \sup |a_i|$

$E = \mathcal{C}^0([0,1])$ avec $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$

Def Equivalence de Normes.

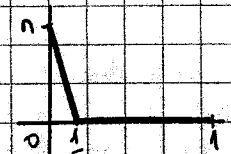
N_1 et N_2 sont dites équivalentes lorsqu'il existe $C > 0$ tq $\forall x \in E, \quad \frac{1}{C} N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x)$

Prop En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Ex $\mathbb{R}_n[X]$: les deux normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ def plus haut sont équivalentes

C-ex $E = \mathcal{C}^0([0,1])$, avec $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$ et $\|\cdot\|_\infty$. Ces deux normes ne sont pas équivalentes.

On le montre avec la suite de fonctions :



Th Riesz E est de dimension finie $\iff \overline{B_f(0,1)}$ est compacte

2) Espaces de Banach [BP]

Def (E, N) est dit de Banach s'il est complet pour la norme N.

Ex . Les espaces de dimension finie sont de Banach

- $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach

$\mathbb{R}[X]$ n'est pas de Banach.

Prop E est un espace de Banach $\iff$ toute série absolument convergente est convergente

Th Riesz-Fisher : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $p \in [1, +\infty[$. (D)

II - L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ [GOU], [HAU].

E, F, G trois evn, $\mathcal{L}(E,F) = \{ f : E \to F$ linéaires et continues $\}$.

1) Applications linéaires continues

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $x \in E$.

Prop On a équivalence entre :

1. f est continue
2. f est continue en x
3. f est uniformément continue
4. $\exists M > 0 \;\; \forall y \in E, \; \|f(y)\|_F \leq M \|y\|_E$.

Rq Si E est de dimension finie, f est toujours continue.

Ex $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ avec $1 \leq p \leq q$

C-ex $u : \mathcal{C}^0[0,1] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$ est une appl linéaire continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais non continue pour $\|\cdot\|_1$.

Th Prolongement par continuité. Si $\tilde{E} \subset E$ est dense dans E et $\tilde{T} : \tilde{E} \to F$ continue, alors $\tilde{T}$ se prolonge de manière unique en $T : E \to F$ continue.

Appl. Définition de l'intégrale de Riemann sur les fonctions continues par morceaux sur un segment grâce à la densité des fonctions en escalier.

. Théorème de Plancherel : $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$, $f \mapsto \hat{f}$ se prolonge sur L^2 en une isométrie.

2) Norme d'opérateur

Def/Prop. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. $\|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$

Est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ vérifiant : si $g \in \mathcal{L}(G, E)$, $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$

En pratique : Calcul de norme : la norme n'est pas toujours atteinte.

Ex : . $f \in L^2([0,1])$, $g \mapsto \int fg$, la norme est atteinte
. $u : \mathcal{C}^0(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f$, la norme n'est pas atteinte

Prop Si F est complet, $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ est de Banach

Appl . Définition de l'exponentielle de matrice : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$
(Intérêt : résolution d'équations différentielles)
. Existence de l'inverse de $(I+u) \in \mathcal{L}(E)$ lorsque $\|u\| < 1$:
$(I+u)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k$

Dualité

Def Lorsque $F = \mathbb{K}$ on note $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ le dual topologique
Ex . $(\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^n$
. $(c_0)' \simeq \ell^1$
. $(\ell^p)' \simeq \ell^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Prop $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire. f est continue $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f$ est fermé.

[GOU], [BRE], [ZQ], [CM] 2

III. Applications linéaires dans les espaces de Banach

manque les hypothèses générales E et F Banach et tout

Def $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Baire lorsque toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense dans E.
Prop Les espaces de Banach sont des espaces de Baire.
Soient E et F deux espaces de Banach.

1) Le théorème de Banach Steinhaus

TR Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F tq :
$\forall x \in E$, $\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < +\infty$
Alors : $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$

D

Appl : . Il existe des fonctions continues qui ne sont pas limite de leur série de Fourier
. Réciproque du théorème de Mertens
. Il existe des fonctions de $\mathcal{C}^0([a,b])$ qui ne sont pas limite de leurs polynômes interpolateurs de Lagrange.

Cor Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$ tq $\forall x \in E$, $(T_n x)_n$ converge dans F vers Tx. Alors $\sup_n \|T_n\| < \infty$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$

2) Théorème de l'application ouverte

TR Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue surjective
Alors il existe $c > 0$ tel que $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$

Appl : $L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c^{\mathbb{Z}}$
$f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas surjective.

TR Graphe fermé. Soit T une application linéaire.
Alors T est continue $\Longleftrightarrow$ Le graphe de T est fermé dans $E \times F$
(graphe : $G(T) = \{(x, Tx), x \in E\} \subset E \times F$).

IV. Espaces de Hilbert [BRE], [OA].

Pour simplifier les écritures on se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1) Produit scalaire

def : Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire ssi
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire symétique définie positive.
. $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E
. $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est de Hilbert s'il est complet.

Ex . $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
. $L^2(\Omega)$ en particulier $\ell^2(\mathbb{N})$.

Propriétés . Inégalité de Cauchy-Schwarz : soient $x, y \in E$ alors
$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$
. Identité du parallélogramme. Une norme dérive d'un produit scalaire ssi $\forall x, y \in E$, $\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2}$

Def x et y dans E sont orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$
Prop Soit $A \subset E$, on note $A^\perp = \{y \in E : \forall a \in A, \langle a, y \rangle = 0\}$
C'est un sev fermé de E.

Prop Soit $K \subset E$ un convexe fermé non vide. Alors $\forall f \in E$, $\exists!\, u \in K$ noté $P_K(f)$ tel que $\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$
De plus, u est caractérisé par : . $u \in K$
. $\langle f - u, v - u \rangle \leq 0$ $\forall v \in K$.

2) Applications linéaires dans les espaces de Hilbert

Prop. Soit H un sev de E.
H est fermé ssi sa projection orthogonale p_H est continue
. $E = \overline{H} \oplus H^\perp$

Dualité dans les espaces de Hilbert :

Th (Riesz) Soit $f \in E'$ (Hilbert). Alors il existe un unique $v \in E$ tel que $\forall x \in E$, $f(x) = \langle v, x \rangle$. De plus, $\|f\|_{E'} = \|v\|_E$.

Appl : Existence et unicité de l'opérateur adjoint : $f \in \mathcal{L}(E)$.
f^* est l'unique application vérifiant :
$\forall x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^* y \rangle$.

3) Bases hilbertiennes

Def E un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base Hilbertienne de E si elle vérifie :

- $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ $\forall i, j \in I$
- $\mathrm{vect}(e_i, \in I)$ est dense dans H.

Th Existence : tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable

Th Caractérisation : Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E séparable. On a équivalence :

1. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne
2. $\forall x \in E$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$
3. $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$
4. $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$

De plus l'application $\Delta : \begin{array}{l} E \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$

Est une isométrie surjective de H sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

Appl : $\{t \mapsto e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$
La décomposition de $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ pour cette famille correspond à sa décomposition en série de Fourier.

Références :

- [GOU] Gourdon analyse
- [HAU] Hauchecorne, les contre-exemples (2e édition)
- [BP] Briane - Pagès, Théorie de l'intégration
- [BRE] Brézis, Analyse fonctionnelle
- [CM] Crouzeix Mignot
- [ZQ] Zuily Queffélec
- [OA] Objectif agrégation.

Développements :

- Théorème de Riesz - Fisher [BP]
- Théorème de Banach Steinhaus + une application [BRE]
+ [GOU] ou [CM] selon l'application qu'on choisit :
  [GOU] pour les séries de fourier
  [CM] pour les polynômes interpolateurs