①

140. Systèmes d'équations linéaires, systèmes échelonnés, Résolution. Exemples et applications.

I - Système d'équations

1) Définition et interprétation matricielle [GRI]

Soient $p, n \in \mathbb{N}$, et $(a_{ij})_{\substack{i=1..p\\ j=1..n}}$, $(b_i)_{i=1..p}$ des familles d'éléments d'un corps K commutatif.

Soit le système d'équations :

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

où l'inconnu est le vecteur ${}^t(x_1 \dots x_n) \in K^n$.

Le système est dit <u>compatible</u> s'il admet au moins une solution.

Si on pose $A = (a_{ij}) \in M_{pn}(K)$ et $B = (b_i) \in K^n$, le système est équivalent à résoudre : $\underline{AX = B}$

le rang de A est appelé rang du système.

2) Systèmes de Cramer [GRI]

Déf : on appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.

Dans ce cas on a $\det A \neq 0$ et on peut écrire $X = A^{-1}B$.

On dispose également des formules de Cramer :

Formule : Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et x_i la i-ième composante de $X = A^{-1}B$.
on note $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A.
Alors $x_i = \dfrac{1}{\det A} \det(C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \dots, C_n)$

Ex : $S = \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$

Les formules de Cramer donnent :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{46}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Rq En petite dimension, les formules de Cramer sont pratiques. Mais dès que $n \gg 3$ ou 4, elles sont difficiles à utiliser car il faut calculer $n+1$ déterminant de taille n.

3) Problèmes de compatibilité

Thm de Rouché - Fontené [GRI]

Soit

$$S = \begin{cases} \boxed{a_{11}x_1 \dots + a_{1r}x_r} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \boxed{a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pr}x_r + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Un système de rg r.

On peut supposer que le mineur entouré est non nul.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & \dots & a_{1r}x_r \\ \vdots & & \\ a_{r1}x_r & \dots & a_{rr}x_r \end{vmatrix} \neq 0$$

1. Le système est compatible si et seulement si pour tout s dans $[\![r+1,n]\!]$, $\Delta_s = \begin{vmatrix} \delta & \begin{matrix} b_1 \\ b_r \end{matrix} \\ a_{s1} \dots a_{sr} & b_s \end{vmatrix} = 0$

2. Si le système est compatible on a alors un système de Cramer "à paramètres" :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_r. \end{cases}$$

Rq - Les solutions d'un système linéaire de rang r forment un espace affine de dimension $n-r$, de direction $\operatorname{Ker} A$.
- Le système est homogène si $B = 0$. Ds le cas, les solutions forment un espace vectoriel ($\operatorname{Ker} A$).

Ex $\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ 2x + 2y + 2z = \alpha + \beta \end{cases}$

Système de rang 2.

Les solutions s'écrivent $\begin{cases} x = \dfrac{\alpha - \beta}{2} + 2z \\ y = \beta - 3z \\ z = z \end{cases}$

càd $\begin{pmatrix} \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \beta \\ z \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II - Résolution de systèmes [GRI]

1) Système échelonné

Déf: Le système $AX=B$ est dit échelonné si la matrice A est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

Ds le cas échelonné on peut aisément obtenir le rang du système et sa solution (ses solutions) si elle(s) existe(nt).

Il suffit en effet de résoudre " en cascade ":

Ex: $\begin{cases} x - 3y + 4z = 5 \\ \quad 2y + 5z = 2 \\ \qquad\quad z = 6 \end{cases}$ on a z, on peut avoir y, et enfin avoir x

2) Se ramener à un système échelonné

Dans un corps commutatif, on effectue la méthode du pivot de Gauss.

Prop L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue les opérations élémentaires suivantes:
1. Changer l'ordre des équations
2. multiplier une équation par un scalaire non nul
3. Ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres

Munit de ces opérations, on va transformer A en une matrice triangulaire supérieure, et donc se ramener au cas plus pratique du système échelonné.

Voici ce que ça donne sur un exemple:

$$S = \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 & L_1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 & L_2 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 & L_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$S = \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ \boxed{\begin{array}{l} y + 4z - 5w = 5 \\ 3y + 12z - 15w = 7 \end{array}} \end{cases}$$ on recommence sur le système encadré

on arrive à $S = \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ \quad y + 4z - 5w = 5 \\ \qquad\qquad 0 = -8 \end{cases}$ Le système n'est donc pas compatible.

3) Coefficients dans un anneau principal [SER]

On dispose de l'algorithme des facteurs invariants

Thm Soit $M \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathcal{A})$ une matrice à coefficients dans un anneau principal $\mathcal{A}$. Alors il existe deux matrices inversibles P et Q appartenant respectivement à $GL_n(A)$ et $GL_m(A)$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_{n m}(\mathcal{A})$ diagonale telles que:
- $M = P.D.Q$
- $d_1 \mid d_2 \dots d_i \mid d_{i+1}$

les d_i sont uniques à association près et sont appelés facteurs invariants de M.

Rq Ds le cas d'un corps, on retrouve l'équivalence d'une matrice de rg r à la matrice $J_r = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r} & (0) \\ (0) & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$.

on a alors le système $MX = B$ qui devient $PDQX = B$
$\Leftrightarrow D(QX) = (P^{-1}B)$

Si on pose $Y = QX$ on peut aisément résoudre $DY = P^{-1}B$

Puis $Y = QX \Leftrightarrow X = Q^{-1}Y$. (Si le système est compatible.)

Dvpt: algorithme de fabrication de la matrice D.

4) Application: équation d'un sous-espace

Soient $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de K^n et $F = \text{vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Il s'agit de déterminer un système d'équations linéaires dont les solutions sont exactement les éléments de F.

Une équation quelconque du système est de la forme
$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$ où les (x_i) et les coordonnées de $x \in F$.

On écrit ces équations pour chaque v_i et on obtient un système linéaire dont les inconnues sont les (a_i).

III. Méthodes itératives de résolution [CIA]

Le pivot de Gauss a ses limites, surtout lorsqu'on travaille sur ordinateur: on peut avoir des problèmes de flottants

Ex: $\begin{cases} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ la solution exacte est: $x_1 = 1 + 10^{-4}$, $x_2 = 0{,}9999$.

Mais l'ordinateur avec des erreurs d'arrondis trouvera, en prenant 10^{-4} comme pivot, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$ ce qui est loin de la réalité.

1) Principe des méthodes itératives

On veut résoudre $AX = B$. (A inversible).
Supposons qu'on ai trouvé B' une matrice, et C un vecteur tels que $(I - B)$ soit inversible et tel que la solution du système $X = B'X + C$ soit celle de $AX = B$

Alors on prend un vecteur initial X_0 et on itère $X_{k+1} = B'X_k + C$
la méthode est convergente si $\lim_{k \to \infty} X_k = X$ pour tout vecteur initial X_0.

Thm Critère de convergence.
On a équivalence entre :
1. la méthode est convergente
2. $\rho(B) < 1$
3. $\|B\| < 1$ pour une norme matricielle

2) Quelques méthodes courantes

On décompose A en $A = M - N$ où M est facile à inverser. On a alors $AX = B \Leftrightarrow MX = NX + b \Leftrightarrow X = \underbrace{M^{-1}N}_{B'}X + \underbrace{M^{-1}b}_{C}$.

et $B' = M^{-1}N = I - M^{-1}A$ inversible.

Méthode de Jacobi.

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{bmatrix}$$

on écrit $A = D - (E + F)$
(en supposant $a_{ii} \neq 0 \ \forall i \in [\![1, n]\!]$).

on a $AX = B \Leftrightarrow X = D^{-1}(E+F)X + D^{-1}B$.

et on note $J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$ la matrice de Jacobi.

Méthode de Gauss-Seidel

On écrit cette fois $A = (D - E) - F$.
$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$ est la matrice de Gauss-Seidel

Méthode de relaxation

Soit $w \neq 0$, on écrit $A = \left(\frac{D}{w} - E\right) - \left(\frac{1-w}{w} D + F\right)$.

la matrice associée est $\mathcal{L}_w = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w} D + F\right)$.

3) Etude de la convergence

On a quelques résultats de convergence intéressants lorsque A est hermitienne définie positive.

Lemme Soit A hermitienne définie positive, $A = M - N$ où M est inversible. Alors :
- $(M^* + N)$ est hermitienne
- Si $M^* + N$ est définie positive alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

De ce lemme on peut déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de relaxation converge :

Thm La méthode de relaxation converge si et seulement si $\omega \in]0, 2[$.

(dev) : lemme ⊕ théorème.

Guifone
Ciarlet
[illegible]ene, les matrices