140 - Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications. 2008/09

Important : parler de syst. linéaires sur $\mathbb{Z}$. ($\Rightarrow$ ⚠ $\mathbb{Z}$ pas corps, c'est pour ça qu'on parle de A-modules)

Préambule : On se donne $\mathcal{A} : E \to F$ (resp $\Pi \to N$)
E, F k-espaces vectoriels (resp Π, N A-modules)
avec $\mathcal{A}$ linéaire.

But : Résoudre $\mathcal{A}x = b$ où $b \in F$ (resp. N)
c'est à dire trouver $\{x \in E \text{ (ou } \Pi) \,/\, \mathcal{A}x = b\}$

Intérêt des systèmes linéaires ? Quelques situations :

1- Matrice du laplacien : On cherche à résoudre numériquement $\Delta u = f$ avec $u \in \mathcal{C}^2(I)$ et I segment de $\mathbb{R}$.
$\rightsquigarrow$ introduction d'une subdivision de I en intervalle de taille h $I = \bigcup_i [t_i, t_i + h]$, $U = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \vdots \\ u(t_n) \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ On est conduit à résoudre $\begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{pmatrix} U = h^2 F$

2- linéarisation (systèmes d'équations différentielles)
Soit l'équation $\dot{x} = f(x)$ où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre de f. Si x_0 est un point asymptotiquement stable du linéarisé $\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0)$, alors x_0 est un point asymptotiquement stable de $\dot{x} = f(x)$
$\rightsquigarrow$ On est amené à étudier $\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0)$

3- géométrie : intersection de sous-espaces vectoriels (ou affines)

I/ Structure de l'ensemble des solutions

$\mathcal{A} : \Pi \to N$, $(*) : \mathcal{A}x = b$, $\mathcal{S} = \{x \in \Pi \,/\, (*)\}$

a) Cas général : Π, N A-modules

Proposition : (i) Si $b = 0$, $(*)$ est dit homogène et on a $\mathcal{S} = \ker \mathcal{A}$
(ii) Si $b \neq 0$, $(*)$ est non homogène. deux cas :
- si $b \notin \operatorname{Im} \mathcal{A}$, $\mathcal{S} = \emptyset$ ($(*)$ est incompatible)
- si $b \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, $\mathcal{S} = \tilde{x} + \ker \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}.\tilde{x} = b$.
($\tilde{x}$ est une solution particulière. $(*)$ est compatible)

à qui c'est parle de A-modules)

exemple : $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

b) Π et N A-modules libres de type fini, A principal

Thm : (i) $\ker \mathcal{A}$ est un sous-A-module libre de Π.
(ii) $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ est un sous-A-module libre de N.
(iii) (Thm. du rang) $\operatorname{rg} \ker \mathcal{A} + \operatorname{rg} \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{rg} \Pi$

⚠ $\operatorname{rg} \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{rg} N \not\Rightarrow$ (en général) $\mathcal{A}$ surjectif : penser à $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$

Rmq : Ceci implique $\operatorname{rg} \ker \mathcal{A} = \operatorname{rg} \Pi - \operatorname{rg} \operatorname{Im} \mathcal{A} \geq \operatorname{rg} \Pi - \operatorname{rg} N$ et donc aussi :

Corollaire : (système surdéterminé). Si $\operatorname{rg} \Pi > \operatorname{rg} N$, alors $\operatorname{rg} \ker \mathcal{A} \geq 1$ (ou encore : si le système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a des solutions non triviales)

Application à l'interpolation polynomiale

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ un $(n+1)$-uplet de points distincts de $\mathbb{R}$.
(i) interpolation de Lagrange : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Alors $\exists! P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$
(ii) interpolation de Hermite : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable
$\exists! P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$
(iii) interpolation par splines cubiques : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a = t_0 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$. Il existe une unique fonction $s \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telle que $s_{|[t_i, t_{i+1}]}$ soit polynomiale de degré 3, $s(t_i) = f(t_i)$, $s'(a) = \alpha$ et $s'(b) = \beta$. (DVT n°1)

II) $\mathcal{A} : E \to F$ avec E, F k-espaces vectoriels de dimension finie

a) k corps quelconque ; méthode algébriques, échelonnement

(*) Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(k)$.

Définition: Le système $\mathcal{A}.x = b$ (*) est dit de Cramer si $\mathcal{A} \in GL_n(k)$.

Formules de Cramer: Soit $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

un système de Cramer.

Alors $\mathcal{A} = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est inversible et les coordonnées de la solution sont : ($i^{\text{ème}}$ colonne)

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\mathcal{A})}$$

Applications: - Systèmes de Vandermonde

- Il existe une fonction entière f telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(2^k) = (-1)^k$ [N.B. pas unicité] (DVT n° 2)

(*) **Méthode du pivot de Gauss et décomposition LU** (pas de pivot sur les A-modules)

$\mathcal{A} = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ inversible.

Principe de l'algorithme: 1. si $a_{11} \neq 0$, $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ (a_{11} est le pivot)

2. si $a_{11} = 0$, $\exists i \in [\![2, n]\!]$, $a_{i,1} \neq 0$. échanger L_i et L_1 puis effectuer étape 1 (a_{i1} est le pivot)

On obtient ainsi une matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \times - \times \\ 0 & \sim \end{pmatrix}$ et on

Lien avec la décomposition LU: Si tous les pivots successifs sont non nuls, alors cela revient à multiplier $\mathcal{A}$ par des matrices de transvection triangulaires inférieures.

On a alors $\mathcal{A} = LU$, L triangulaire inf. et U triang sup.

Décomposition PLU: $\mathcal{A} = PLU$, L, U comme précédemment, P matrice de permutation

Remarque (complexité): • Formules de Cramer en $O(n!)$ → outil théorique

• Pivot de Gauss en $O(n^3)$ ensuite la résolution se fait en temps linéaire ($\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$ 2 systèmes triangulaires)

b) E et F munis d'une structure euclidienne (ou hermitienne)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire (ou hermitien)

Soit $\mathcal{A} \in GL_n(\mathbb{K})$. On peut voir les colonnes de $\mathcal{A}$ comme une base de $\mathbb{K}^n$.

→ En orthonormalisant ces colonnes pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par l'algorithme de Gram-Schmidt, on obtient $Q \in O_n(\mathbb{R})$ (resp $U_n(\mathbb{C})$) et R triang sup à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $\mathcal{A} = Q.R$.

Rmq: On peut aussi obtenir Q et R en multipliant $\mathcal{A}$ à gauche par des matrices de Householder ($v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H(v) = Id - \frac{2vv^T}{v^Tv}$)

Avantage: Ces matrices sont de conditionnement $C(H(v)) = 1$

c) $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n,m}(k)$

En appliquant l'algorithme de Gauss à $\mathcal{A}$, on peut trouver $I \subset [\![1, n]\!]$, $J \subset [\![1, m]\!]$ tq $\tilde{\mathcal{A}} = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ soit carrée inversible de même rang que $\mathcal{A}$.

$b=(b_i)_{i\in I}$ et $b_i = \sum a_{ij} \dots$

III) E et F étant des $\mathbb{R}$-espaces vect. de dim. qcq

a) Systèmes d'équations différentielles linéaires

$(*)$ $y' = f(y,t)$ avec $f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, f continue et linéaire par rapport à sa première variable, I intervalle.

Théorème : (Cauchy-linéaire) L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(*)$ est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. De plus on a l'isomorphisme, $\forall t_0 \in I$,
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto y(t_0) \end{aligned}$$

On peut expliciter une base de $\mathcal{S}$ quand $(*)$ est autonome.
Si $(e_1, -, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(t \mapsto [\exp(tf)]\, e_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{S}$.

b) Systèmes d'équations récurrentes linéaires

$(*)$ $X_{n+1} = f(X_n)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire. $E = (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$

Théorème : L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(*)$ est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E de dimension n. On a de plus l'isomorphisme :
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to \mathbb{R}^n \\ (X_n) &\mapsto X_0 \end{aligned}$$

c) Système d'ordre supérieur

Soit T un opérateur linéaire : $E \to E$, E $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition : (lemme des noyaux). Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux, alors
$$\ker (PQ)(T) = \ker P(T) \oplus \ker Q(T)$$

Application : $(*)$ $y'' + 3y' + 2y = 0$ s'écrit aussi comme $P(D)(y) = 0$ avec $P = X^2 + 3X + 2$, $D : y \mapsto y'$.
Ici on a $P = (X+1)(X+2)$ donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{y'+y=0} \oplus \mathcal{S}_{y'+2y=0}$

IV) M et N A-modules de type fini. A euclidien.

On choisit A euclidien (plutôt que principal) pour des motivations algorithmiques. $|\cdot| \to$ stathme euclidien.

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n,m}(A)$.

Théorème : (facteurs invariants) Il existe $r \in \mathbb{N}$ et $d_1, \dots, d_r \in A$ tels que $d_1 / \dots / d_r$, et il existe $U \in GL_n(A)$, $V \in GL_m(A)$ telles que
$$\mathcal{A} = U \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ 0 & \ddots\, d_r & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{n,m} V^{-1}$$
s'énonce sans parler de module

Remarque : Ce théorème est la généralisation du thm affirmant que toute matrice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n,m}(k)$ est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(k)$ où $r = \operatorname{rg} \mathcal{A}$

On retient surtout de ce théorème la démarche algorithmique :

1. Si $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $a_{i,1} = 0$, traiter $\tilde{\mathcal{A}}$, $A = \begin{pmatrix} x & - & x \\ 0 & \tilde{} & \\ 0 & \mathcal{A} & \end{pmatrix}$
2. si $|a_{11}| = \min\{|a_{i1}|, a_{i1} \neq 0\}$ alors $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - q_i L_1$.
3. Si $|a_{11}| \neq \min\{|a_{i1}|$ il existe i_0 tel que $a_{i_0,1} \neq 0$ et de stathme minimal. $L_{i_0} \leftrightarrow L_1$ et reprendre l'étape 2.

$*$ Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, on peut aussi obtenir des théorèmes d'existence de solutions suffisament petites :

Lemme de Siegel : Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $n > m > 0$. Soit α un entier tel que $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,j}| \leq \alpha$. $(\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j})$
Alors il existe $x \in \mathbb{Z}^n$, $x \neq 0$ tel que $\mathcal{A}x = 0$ et si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|x_j| \leq (n\alpha)^{\frac{m}{n-m}} + 1$

Preuve en dvt n° 3

Rmq : on peut (il faut...) parler plus de méth. num^q : . gradient
. Jacobi
. stabilité ...

Réf : [Arnaudiès]
[Obj]
[FGN] oraux X-ENS

Ex : méth. résol. de $2x_1 + 3x_2 = 1$.