Leçon n° [illegible] : Sous-Espaces Stables d'un Endomor[illegible]sme d'un espace vectoriel de dimension Finie. Applications.

Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie

I Généralités et premières propriétés

1. Définitions et premiers exemples [O.A] p158 + [RDO 2] p78

Déf : Soient F un ssev de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$

Exemples :
- $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u
- Les sous-espaces propres de u sont stables par u
- Si $K = \mathbb{R}$, u admet au moins un plan ou une droite stable.

prop : L'intersection et la somme de sous-espaces stables est stable par u.

Rq : On peut donc considérer le plus petit sous-espace stable par u d'une partie A de E comme l'intersection de tous les sous-espaces stables par u contenant A.

prop : Les droites vectorielles de E stables par u sont les droites engendrées par les vecteurs propres de u.

2. Endomorphismes induits [O.A] p158

Soit F un ss.ev de E, de dimension r, stable par u.

On note $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ la restriction de u à F et $\bar{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ obtenu par passage au quotient.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "u_{|F}"] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "u"] & E/F \arrow[d, "\bar{u}"] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] & E/F \end{tikzcd}$$

Théorème : On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dont les r premiers vecteurs forment une base de F, $\mathcal{B}_F$. Notons $\mathcal{B}'$ le complémentaire de $\mathcal{B}_F$ dans $\mathcal{B}$.

Alors $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$. De plus $\pi(\mathcal{B}')$ est une base de E/F que l'on note $\mathcal{B}_{E/F}$ et on a $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F})$; $B = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_{E/F}}(\bar{u})$

De plus, on a [illegible] $= \chi_{u_{|F}} \times \chi_{\bar{u}}$

appl° :
- χ_u irréductible $\Leftrightarrow$ u n'admet pas de sous-espace stable non trivial
- u nilpotent $\Leftrightarrow$ $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont nilpotent
- Th de Cailey-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$

3. Supplémentaires stables [Gob] p130

prop : Si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ où les E_i sont stables par u. $\forall i \in [\![1;k]\!]$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i. Alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ est une base de E et $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1;k]\!]$ $A_i = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{|E_i})$

prop : u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.

Th de Maschke : Soit G un groupe fini. Soit V un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie. Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ un morphisme de groupe. Soit W un sous-espace de V stable par $\rho(g)$, pour tout $g \in G$.
Alors il existe un supplémentaire W° de W dans V qui soit stable par $\rho(g)$, pour tout $g \in G$. [L.S]

4. Dualité [Gou] p129

Déf : Soient E et F deux Kev de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$
$\forall f \in F^*$ on a $f \circ u \in E^*$
L'application linéaire $\begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ f & \longmapsto & f \circ u \end{array}$ est appelée transposée de u et notée ${}^t u$

- Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A\ \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de A $A^\perp$ est un ss.ev de E^*
- Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B\ \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de B B° est un ss-ev de E

prop : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un ssev F de E est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Rq : Trouver les hyperplans stables par u revient à trouver les droites stables par ${}^t u$.

II Application à la réduction

1. Endomorphismes commutant [O.A] p 159 + [RDO1] p 397

Prop : Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors
(i) Tout sous-espace propre relativement à u est stable par v
(ii) Le noyau et l'image de u sont stables par v.

Appl° : Si $P \in K[X]$, u et $P(u)$ commutent
$\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

Théorème de réduction simultanée : Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux.
Si tous les f_i sont trigonalisables (resp diagonalisables) alors il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont toutes triangulaires (resp diagonales).

Appl° : - décomposition polaire (pour l'unicité)
- lemme de Schur : E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie. Soit $Q \subset \mathcal{L}(E)$ tel que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E.
Alors, les seuls éléments commutant avec tous les éléments de Q sont les homothéties.
$\Leftrightarrow$ ex dans $\mathbb{R}^2$: $Q = \{\text{rotation d'angle } \pi/2\}$

2. Lemme des Noyaux et conséquences [Gou] p 173

Th : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P = P_1 \dots P_k \in K[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux. Alors $\mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_k(u)$

Appl° : $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi $\exists P \in K[X]$ scindé sur K ayant toutes ses racines simples tel que $P(u) = 0$

Prop : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, soit F un ssev de E stable par u alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ et $\bar{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ sont diagonalisable.

Décomposition en sous-espaces caractéristiques : [Gou] p 189

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$: $\chi_u(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_r)^{\alpha_r}$
$\forall i \in [\![1;r]\!]$ le sous-espace $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id)^{\alpha_i}$ est appelé le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i

Prop : (i) $\forall i$ N_i est stable par u
(ii) $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$
(iii) $\forall i \in [\![1;r]\!]$ $\dim(N_i) = \alpha_i$

III Endomorphismes cycliques.

1. Définition [Gou] p 279

Déf : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $\{P(u)(x) \mid P \in K[X]\} = E$, c'est le plus petit ss espace stable par u engendré par x.

Prop : u cyclique $\Leftrightarrow$ $\deg(\pi_u) = n$ $\Leftrightarrow$ $\pi_u = (-1)^n \chi_u$

2. Invariants de similitude

DEV

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $F_1, F_2, \dots, F_r$ de ss ev de E tous stables par u telles que :
(i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
(ii) $\forall i \in [\![1;r]\!]$ $u_i = u_{|F_i}$ est un endomorphisme de F_i, cyclique
(iii) Si P_i désigne le polynôme minimal de u_i, on a $P_{i+1} \mid P_i$ $\forall i \in [\![1;r-1]\!]$
La suite des polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de u et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de u.

Th : réduction de Frobenius : Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de similitude de u, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$$
où $\forall i$ $C(P_i)$ désigne la matrice compagnon associée au polynôme P_i.

Cor : Deux endomorphismes de E sont semblables ssi ils ont même invariants de similitude.

Appl° : réduction de Jordan.

IV Endomorphismes remarquables

1. Semi-simplicité [Gou] p 219

Déf : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si pour tout ss ev F de E stable par u, il existe un supplémentaire S de F stable par u.

Th : u ( ) semi simple ssi π_u, le polynôme minimal ( ), est produit de polynômes irréductibles unitaires, distincts deux à deux.

Rq : Si K est algébriquement clos,
u est semi-simple ssi π_u n'a que des racines simples
ssi u est diagonalisable.

appl : (aux endomorphismes induits) : $u \in \mathcal{L}(E)$ semi-simple. Si $F \subset E$ est stable par u alors $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont semi-simples.

Décomposition de Dunford : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur K, alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec u diagonalisable et n nilpotent tel que $u = d+n$ et $dn = nd$ [O.A] p160

appl : • u est diagonalisable ssi $\exp(u)$ est diagonalisable
$\exp(u) = Id$ ssi $Spec(u) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$
• $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^2\}$.

2. Endomorphismes normaux [RDO2] p80

Soit E un espace euclidien ou hermitien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et u^* l'adjoint de u

Def : $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $uu^* = u^*u$

prop : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si F est un ssev de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*

prop : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, si E_λ est un sous espace propre de u associé à la valeur propre λ alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Th : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K-ev hermitien
Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u est normal
(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E
(iii) u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune.

Th : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K-ev euclidien
Si u est un endomorphisme normal, alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ où } \forall i\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \forall j\ \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

τ_j est une matrice d'une similitude directe

DEV€

Bibliographie :
Gourdon
Objectif Agrégation
Goblot
Ramis Deschamp Odoux T1 & 2
Leichtnam & Schauder T2.

DVPT cyclique + normaux