Cadre : $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle.

I. L'anneau $\mathbb{K}[[X]]$

1) Structure de l'ensemble des séries formelles

Déf On note $\mathbb{K}[[X]]$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni des deux opérations suivantes :
- $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ [SP]
- $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \cdot (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}\right)_{k\in\mathbb{N}}$

Prop $\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau commutatif intègre. [SP]

Prop Un élément de $\mathbb{K}[[X]]$ est inversible ssi son terme de degré 0 est non nul. [SP]

Prop Soit A le ss-anneau de $\mathbb{K}(X)$ constitué des fractions rationnelles qui n'ont pas 0 pour pôle. [SP]
Alors $\psi : A \longrightarrow \mathbb{K}[[X]]$, $\frac{P}{Q} \longmapsto P.Q^{-1}$ est un morphisme injectif d'anneaux.

Déf Soit $A \in \mathbb{K}[[X]]$, A non nulle. On appelle valuation de A, notée $v(A)$, le nombre : [SP]
$$v(A) = \min\{i\in\mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} \quad \text{si } A = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i.$$

Rq A inversible $\Leftrightarrow$ $v(A) = 0$. [SP]

Prop $\mathbb{K}[[X]]$ muni de la valuation v est un anneau euclidien. [SP]

Prop Les idéaux de $\mathbb{K}[[X]]$ sont les (X^p), $p\in\mathbb{N}$.
$\mathbb{K}[[X]]$ est donc principal. [FG]

2) Opérations dans l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$

Déf Soient $S \in \mathbb{K}[[X]]$ tq $v(S) \geq 1$ et $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$.
On appelle composée de T par S, notée $T\circ S$, la série formelle : $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n S^n$ [AF]

Déf On définit la dérivation sur $\mathbb{K}[[X]]$ en posant :
$$D\left(\sum a_i X^i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} (i+1)\, a_{i+1} X^i$$ [SP]

Prop Soient P et Q dans $\mathbb{K}[[X]]$. On a : [SP]
$$P' = 0 \iff P \in \mathbb{K}$$
$$D(PQ) = D(P).Q + P.D(Q)$$

Ex . on définit E_a, $a\in\mathbb{K}$, comme l'unique $S\in\mathbb{K}[[X]]$ vérifiant $S' = aS$ et $S(0)=1$. On a $E_a E_b = E_{a+b}$, $b\in\mathbb{K}$. [SP]

App° . nombre de dérangements dans $\mathfrak{S}_m$ [AF]
$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad D_m = m!\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}\right)$$

Déf On définit l'opération inverse de la dérivation : pour tout $P\in\mathbb{K}[[X]]$, P possède des primitives définies à une constante près : $\int P = \sum_{i\geq 1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i + k$, $k\in\mathbb{K}$ [SP]

II. Séries génératrices

1) Définitions et premières applications

Déf Soit $S = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
On dit que la série formelle $G(S) = \sum_{i\geq 0} s_i X^i$ est la série génératrice de S. [SP]

Ex
- suite : $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ SG : $\frac{1}{1-X}$
- suite : $(1, 0, 1, 0, \ldots, \frac{1+(-1)^k}{2}, \ldots)$ SG : $\frac{1}{1-X^2}$
- suite : $(1, 2, 3, \ldots, k, \ldots)$ SG : $\frac{1}{(1-X)^2}$ [SP]
- suite : $(1, \binom{n+1}{n}, \ldots, \binom{n+k}{n}, \ldots)$ SG : $\frac{1}{(1-X)^{n+1}}$

App° 1) Étude de la suite $\left(\frac{n^3+2n-1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^3+2n+1}{n!} = 6e+1$$ [SP]

2) nombre de façons d'écrire m comme somme de k entiers.

On a $\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n\geq 0} f(m,k) x^m$. [WILF]

3) nombre de façons d'avoir m € avec des pièces de 1, 2 et 3 €

[DVPT] On a $p(m) = \frac{(n+3)^2}{2} - \frac{7}{72} + \frac{(-1)^m}{8} + \frac{2}{9}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ [ACL]

4) nombres de Stirling :

S_n^k : nombre de partitions en k ss-ensembles, tous non vides, que l'on peut réaliser avec un ensemble à m éléments.

$$\sum_{n\geq 0} S_m^m X^n = \frac{X^m}{(1-X)(1-2X)\cdots(1-mX)}$$ [SP]

5) Fontaine de pièces : nombre de "piles" de pièces telles que la première ligne contienne k pièces et les suivantes ne soit constituées que de pièces qui se touchent ; cela avec n pièces en tout.

$$f(k) = \sum_{j=1}^{k} (k-j) f(j) + 1$$ [WILF]

$$\sum_{k\geq 0} f(k) x^k = \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2}$$

6) nombres de Bernouilli :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n x^n}{m!}$$ [WILF]

On en déduit, en considérant $\frac{x(e^{mx}-1)}{e^x - 1}$ de deux façons :

$$\sum_{j=1}^{N} j^r = \frac{1}{m+1} \sum_{r\geq 1} \binom{m+1}{r} B_{n+1-r} (N+1)^r$$

2) Suites récurrentes

Déf On dit qu'une suite $S = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre k à partir d'un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ s'il existe $k_0 \geq k$ et des coefficients de $\mathbb{K}$ $a_1, \dots, a_k$ tq $\forall n \geq k_0$, le n^{ie} terme de la suite s'écrive comme combinaison linéaire des k termes qui le précèdent : [SP]

$\forall n \geq k_0 \quad S_n = a_1 S_{n-1} + \dots + a_k S_{n-k}$

Déf Pour une telle suite, on appelle polynôme caractéristique de la suite le polynôme : [SP]

$P = X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_k$

Thm S une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, $G(S)$ sa série génératrice. $G(S)$ est un élément de $\varphi(A)$ ssi S est une suite récurrente linéaire à partir d'un certain rang.

App 7) Suites récurrentes : obtenir les formes closes.

Par exemple : suite de Fibonacci. On note F sa série génératrice : $F = \frac{X}{1-X-X^2}$

On a $F = \frac{\sqrt{5}}{5} \sum_{n\geq 0} (-1)^n X^n \left(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}\right)$

où $r_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ [SP] [WILF] [LFA 1]

On obtient la forme close :

$$F_n = \frac{((1+\sqrt{5})/2)^n - ((1-\sqrt{5})/2)^n}{\sqrt{5}}$$

On remarque que $\forall k \geq 1$, $f(k) = F_{2k-2}$ (cf app' 5)

8) Calcul des polynômes de Tchebychev

Pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n(X) = \sum_{\substack{k\geq 0 \\ 2k\leq n}} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} X^{n-2k}$ [AF]

III. Equations différentielles dans $\mathbb{K}[[X]]$

1) Suites P-récurrentes

Déf Une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite P-récurrente s'il existe des polynômes $P_0, \dots, P_k$ de $\mathbb{K}[[X]]$ tq pour tout $n \geq k_0 \geq k$, on ait : [SP]

$$P_k(m) s_{n+k} + P_{k-1}(m) s_{n+k-1} + \dots + P_0(m) s_m = 0$$

Déf Une série formelle $S \in \mathbb{K}[[X]]$ est dite différentiellement finie s'il existe des polynômes de $\mathbb{K}[[X]]$, $Q_1, \dots, Q_k$

tq la série S vérifie l'équation différentielle :

$$Q_k S^{(k)} + Q_{k-1} S^{(k-1)} + \dots + Q_0 S = 0. \quad [SP]$$

On note Δ-finie.

Prop Une série $S \in \mathbb{K}[[X]]$ est Δ-finie ssi il existe des polynômes de $\mathbb{K}[[X]]$ $Q, Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ tq

$$Q_k S^{(k)} + Q_{k-1} S^{(k-1)} + \dots + Q_0 S = Q \quad [SP]$$

Thm Soit $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$, soit $G(S)$ sa série génératrice. La suite est P-récurrente ssi $G(S)$ est Δ-finie. [SP]

App° 9) Soit la série $U = \sum_{n\geq 0} (n+1)!\, X^n = \sum_{n\geq 0} u_n X^n$

U vérifie : $X^2 U' + (2X-1)U + 1 = 0$ [SP]

et $u_0 = 1$.

10) Nombres de Catalan. [SP]

Notons C la série génératrice de la suite des nombres de Catalan : $C = \sum_{n\geq 0} \gamma_n X^n$; $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$

Prop Pour tout $n>0$ on a :

$$\gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \gamma_{n-1-i}$$

C vérifie l'équation différentielle :

$$X(1-4X)C' - (2X-1)C - 1 = 0 \text{ avec } C(0) = 1$$

C est Δ-finie.

On a $\gamma_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}$

2) Autres applications.

11) Nombres de Bell : nombre de partitions de $[[1,n]]$

[DVPT] $B_n = \dfrac{1}{e} \sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{k^n}{k!}$ [WILF] [SP] (KENS)

Références

[SP] Saux-Picard Algorithmes fondamentaux
[LFA 1] Lelong-Ferrand Arnaudiès T1
[AF] Arnaudiès-Fraysse T1
[ACL] Chambert-Loir Analyse 1
[WILF] Wilf Generatingfunctionology

Autres pistes
- clôture algébrique de $\mathbb{K}[[X]]$
- cartes (cf Wilf)
- complétion des pol. (voir les exo), coeff ds un anneau [LANG]

Autres dvpts :
- Nombres de Catalan
- cartes (cf Wilf)
- ...

- Séries formelle à ⊕ieurs variables
- Corps des fractions rationnelles, sa clôture algébrique (Séries de Laurent → série de Puiseux)
-

Plan - Insister ⊕ sur les prop élémentaires (⊗, deriva°)
- faire une partie où on parle de cv pr les séries génératrices (où on peut ds les séries entières)

Voir [CAR] fct analytiques.