138 | Polynômes d'endomorphisme [redacted] Réduction d'un ~~endomorphisme~~ endomorphisme. Applications.

Soit K un corps commutatif et E un K-e.v. de dimension n.

I Polynômes d'endomorphismes : l'algèbre $K[u]$

1) Définitions et premières propriétés

Définition : . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit par récurrence l'endomorphisme u^k, $k \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} u^0 = Id_E \\ u^k = u^{k-1} \circ u, & k \geq 1 \end{cases}$

. Pour $P(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in K[X]$, $P(u) = \sum_{i \geq 0} a_i u^i \in \mathcal{L}(E)$: polynôme en u

Remarque : Avec la définition précédente, on a $u^p \circ u^q = u^{p+q}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ d'où $u^p \circ u^q = u^q \circ u^p$ et $u^k = u \circ u^{k-1}$, $k \geq 1$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\varphi_u : K[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P(X) \mapsto P(u)$ est un morphisme de K-algèbres.

Définition : On note $K[u] = Im(\varphi_u)$ l'ensemble des polynômes en u et $I_u = Ker(\varphi_u)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u

Proposition : . $K[u]$ est une sous-algèbre commutative unitaire de $\mathcal{L}(E)$
· I_u est un idéal non nul de $K[X]$: idéal annulateur de u
· Par passage au quotient, $K[u] \simeq K[X]/I_u$

Exemples : . si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\exp(u) \in K[u]$
. si u inversible, $u^{-1} \in K[u]$

2) Lemme des noyaux

Théorème : Lemme des noyaux
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \times \dots \times P_r$. Alors $Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u))$

Conséquence : Si $P \in I_u$, $Ker(P(u)) = E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u))$ et $Ker(P_i(u))$ stable par u. De plus si π_i est la projection sur $Ker(P_i(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{k \neq i} Ker(P_k(u))$, alors $\pi_i \in K[u]$

Corollaire : Soit $(P_i)_{i} \in I_u$; si $n_i = \dim(Ker(P_i(u)))$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$
Soit u_i l'endomorphisme de u sur $Ker(P_i(u))$, $(e_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$ une base de $Ker(P_i(u))$, M_i la matrice de u_i dans cette base alors $Mat_{(e_{ij})}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix}$ $(M_i \in M_{n_i}(K))$

Application : décomposition de Dunford

3) Polynôme minimal $[u \in \mathcal{L}(E)]$

Définition : Puisque $K[X]$ principal, l'idéal annulateur de u, I_u, est engendré par un unique polynôme unitaire π_u, $I_u = (\pi_u)$ c'est le polynôme minimal de u

Remarque : . si $\dim E < \infty$, I_u est toujours non nul, donc π_u aussi
· $K[u]$ corps $\Leftrightarrow$ $K[u]$ intègre $\Leftrightarrow$ π_u irréductible

Exemples : . nilpotents : u nilpotent d'ordre r ssi $\pi_u = X^r$
· symétries : ($\dim E \geq 2$, $car(K) \neq 2$). Soit $E = F \oplus G$, F et G non nuls et $u = Id_F - Id_G$ est la symétrie % à F et // à G. $u^2 = Id$ donc $X^2 - 1$ annule u or $u \neq \pm Id_E$ donc $\pi_u = X^2 - 1$
· projections : ($\dim E \geq 2$). Soit F sev strict de E, non nul et $u = Id|_F$ est le projecteur sur F. $u^2 = u$ donc $X^2 - X$ annule et $\pi_u = X^2 - X$

Proposition : Si F un s.e.v de E stable par u, alors $\pi_{u|_F}$ existe, $\pi_{u|_F} \mid \pi_u$

Proposition : Soit $(P, \lambda, q) \in K[X] \times K \times \mathbb{N}$, $Ker(u - \lambda Id)^q \subset Ker(P(u) - P(\lambda) Id)^q$

Corollaire : Si λ valeur propre de u, $\forall P \in K[X]$, $P(\lambda)$ valeur propre de $P(u)$ et le sous-espace propre de u associé à λ est inclus dans le sous-espace propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$.
En particulier, toute valeur propre de u est racine de tout polynôme de I_u et donc de π_u.

Conséquence : λ valeur propre de $u \Leftrightarrow \lambda$ racine de π_u

Remarques : $\pi_{u \circ v} \neq \pi_{v \circ u}$, en effet $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$ et $\pi_0 = X$
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = A$ et $\pi_A = X^2$

mais la formule $P(v^{-1} \circ u \circ v) = v^{-1} \circ P(u) \circ v$ donne $\pi_{v^{-1} \circ u \circ v} = \pi_u$

Définition : Soit $x \in E$. On pose $I_{u,x} = \{P \in K[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ et $\pi_{u,x}$ l'unique polynôme unitaire tq $I_{u,x} = (\pi_{u,x})$

Proposition : $\exists x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$

4) Polynôme caractéristique $[u \in \mathcal{L}(E)]$

Définition : On définit le polynôme caractéristique de u par $\chi_u = \det(u - X Id)$

Proposition : les valeurs propres de u sont les racines de χ_u sur K.
En particulier, si K algébriquement clos, u a une valeur propre

Propriétés : $\forall u,v \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_{uov} = \chi_{vou}$

Conséquence : $\forall v \in GL(E)$, $\chi_u = \chi_{v^{-1}ouov}$

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-1)^2(X-2)$, $\pi_A = (X-1)(X-2)$

Théorème : Cayley-Hamilton

On a $\pi_u \mid \chi_u$, i.e. $\chi_u \in (\pi_u) = I_u$, i.e. encore $\chi_u(u) = 0$

Corollaire : π_u et χ_u ont même facteurs irréductibles

Exemples : . $u = \lambda . Id \Rightarrow \chi_u = (-1)^n (X-\lambda)^n$
. u nilpotent ssi $\chi_u = (-1)^n X^n$

Application : Théorème de Burnside.

II Polynômes annulateurs et réductions

1) Trigonalisation/Diagonalisation

* **Définition** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u est trigonalisable
(ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé sur K
(iii) π_u est scindé sur K
(iv) χ_u est scindé sur K

Conséquences : . si u trigonalisable et F s.e.v. de E stable par u alors $u|_F$ est trigonalisable
. si K algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable

Application : si $K = \mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(\exp(u)) = \exp(tr(u))$

Théorème : trigonalisation simultanée

Si u et $v \in \mathcal{L}(E)$ sont trigonalisables et $uov = vou$ alors il existe une base commune de trigonalisation de u et v (u,v cotrigonalisables)

* **Définition** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de u

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u est diagonalisable
(ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
(iii) π_u est scindé à racines simples
(iv) χ_u est scindé sur K et $\forall \lambda_i$ valeur propre de multiplicité h_i, $h_i = \dim(Ker(u - \lambda_i Id))$

Conséquence : si u diagonalisable et F un sev. de E stable par u alors $u|_F$ est diagonalisable

Application : Si $K = \mathbb{F}_q$, u diagonalisable $\Leftrightarrow u^q = u$

Théorème : diagonalisation simultanée

si $u,v \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et $uov = vou$ alors il existe une base commune de diagonalisation de u et v (u,v codiagonalisables)

2) Décomposition de Dunford et Jordan

* **Théorème** : décomposition de Dunford (DVPT)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé sur K. Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que : (i) $u = d+n$, $don = nod$
(ii) d diagonalisable, n nilpotent
De plus, d et n sont des polynômes en u

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^2$, $A = \underbrace{I_2}_{d} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{n}$

Applications : $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u scindé
- ▶ calcul de $\exp(u)$ pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- ▶ décomposition de Dunford de $\exp(u)$
- ▶ u diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(u)$ diagonalisable
- ▶ les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A) = I_n$ sont exactement les matrices diagonalisables telles que $sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$
- ▶ $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$, mais c'est faux dans $\mathbb{R}$
- ▶ si A et B diagonalisables $\in M_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \exp(B) \Leftrightarrow A = B$

*** Définition** : Soit $\lambda \in K$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- on appelle bloc nilpotent de Jordan d'ordre n la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$
- on appelle bloc de Jordan d'ordre n relatif à λ, $J_{\lambda,n} = \lambda Id + J_n$

Théorème : Décomposition de Jordan

$u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u scindé sur K. $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$ 2 à 2 distincts, et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\exists j_i$ une famille $n_{i,1} \geq \dots \geq n_{i,j_i} > 0$ uniques tels que dans une base $\mathcal{B}$ de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Diag(J_{\lambda_1, n_{1,1}}, \dots, J_{\lambda_1, n_{1,j_1}}, \dots, J_{\lambda_p, n_{p,j_p}})$

On l'appelle la réduite de Jordan, unique à l'ordre des blocs près.

Remarque : u diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} j_i = n$

Exemple : la réduite de Jordan de la matrice A de l'ex précédent est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Applications : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- ▶ M semblable à $2M \Leftrightarrow M$ nilpotente
- ▶ M et ${}^tM$ sont semblables

III Applications

1) Algorithme de Faddéev

Algorithme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $car(K) = 0$. On définit $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ par : $B_0 = I_n$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $B_i = AB_{i-1} - \frac{tr(AB_{i-1})}{i} I_n$

alors $\chi_A(X) = (-1)^n \left(X^n - tr(AB_0)X^{n-1} - \frac{tr(AB_1)}{2} X^{n-2} - \dots - \frac{tr(AB_{n-1})}{n}\right)$

et si A est inversible, $A^{-1} = \frac{n}{tr(AB_{n-1})} B_{n-1}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B_0 = I_3$, $B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\chi_A(X) = -X^3 + 5X^2 - X + 3$

2) Réduction de Frobénius et invariants de similitude [$u \in \mathcal{L}(E)$]

Définition : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = \{P(u)(x) \mid P \in K[X]\} = E$, i.e. si $\deg \pi_u = n$, i.e. si $\pi_u = (-1)^n \chi_u$

Définition : Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in K[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(K)$

Proposition : Si u est cyclique, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(u) = C(\pi_u)$

Théorème : Invariants de similitude **DVPT**

Il existe $F_1, \dots, F_r$ s.e.v. de E, tous stables par u, tels que

i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$

ii) $\forall i \in [\![1,r]\!]$, la restriction $u_i = u_{|F_i} \in \mathcal{L}(F_i)$ est cyclique

iii) si P_i désigne le polynôme minimal de u_i, $P_{i+1} \mid P_i$, $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$

La suite de polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de u et non du choix de la décomposition : ce sont les invariants de similitude de u.

Théorème : réduction de Frobénius

Si $P_1, \dots, P_r$ désigne les invariants de similitude de u, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Diag(C(P_1), \dots, C(P_r))$

On a d'ailleurs $P_1 = \pi_u$ et $P_1 \dots P_r = (-1)^n \chi_u$

Corollaire : u et v semblables $\Leftrightarrow$ ils ont même invariants de similitude

Exemple : Soit $\chi_u = X(X-1)(X-2)(X-3)$

- si $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, $P_1 = \chi_u$: 1 seul invariant de similitude
- si $K = \mathbb{F}_2$, $\chi_u = X^2(X-1)^2$: 1 ou 2 invariants de similitude

3) Endomorphismes semi-simple

Définition : $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si $\forall$ s.e.v F de E stable par u il existe un supplémentaire S de F stable par u **DVPT**

Proposition : u est semi-simple $\Leftrightarrow \pi_u = M_1 \cdots M_r$ produits de polynômes irréductibles distincts 2 à 2

Proposition : si $car(K) = 0$, u semi-simple $\Leftrightarrow u$ diagonalisable dans une extension de K

Application : Dunford semi-simple

4) Commutant d'un endomorphisme

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le commutant de u est $\Gamma_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$

Exemple : si u est diagonalisable et ses valeurs propres sont distinctes alors $\Gamma_u = K[u]$

Remarque : On n'a pas toujours $\Gamma_u = K[u]$

↳ $\Gamma_{Id} = \mathcal{L}(E) \neq K[Id]$

Proposition : $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\Gamma_u = K[u] \Leftrightarrow \deg(\pi_u) = n \Leftrightarrow \chi_u = \pi_u \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u$ est cyclique $\Leftrightarrow u$ a un unique invariant de similitude

Bibliographie :

*** Gourdon Algèbre

*** Ramis, Deschamps, Odoux 1

** Francinou - Gianella, Algèbre 2

**** Objectif (soirée part-)Agrégation

**** Monsieur et Madame Bienfoffée
(et surtout leur fils)

Autres développements possibles :

- exponentielle surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$
- Cayley - Hamilton
- endomorphismes normaux (mettre en relation avec le commutant)
- Mais où est charlie ? (dans le plan)