1.2 ...ices symétriques réelles / Matrices hermitiennes.

On suppose connues les définitions de produit scalaire, espace euclidien, espace hermitien, valeurs propres, vecteurs propres, sous espaces propres

I) Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes, liens avec les endomorphismes

① Définitions / Propriétés.

déf : • Soit A une matrice à coefficients réels, A est dite symétrique réelle ssi ${}^tA = A$

• Soit A une matrice à coefficients complexes, A est dite hermitienne ssi ${}^t\bar{A} = A$

Notations : - $S_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tA = A\}$, $S_n^+ = \{A \in S_n, \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0\}$

$S_n^{++} = \{A \in S_n, \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX > 0\}$. $X \neq 0$

- $H_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A} = A\}$, $H_n^+ = \{A \in H_n, \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX \geq 0\}$

$H_n^{++} = \{A \in H_n, \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX > 0\}$. $X \neq 0$

- $AS_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tA = -A\}$, $AH_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A} = -A\}$

Par la suite, A^* désignera ${}^tA$ dans le cas euclidien et ${}^t\bar{A}$ dans le cas hermitien.

→ Cas euclidien : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus AS_n(\mathbb{R})$

$\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim AS_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

→ Cas hermitien : $M_n(\mathbb{C}) = H_n(\mathbb{C}) \oplus AH_n(\mathbb{C})$

l'application : $H_n \to AH_n$, $M \mapsto iM$ est un isomorphisme.

d'où la dimension de H_n, en tant que $\mathbb{R}$-ev est n^2.

② Endomorphismes sym. réels / hermitiens

Soit E un espace euclidien ou hermitien.

déf : Un endomorphisme f de E est dit autoadjoint si $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ $\forall x, y \in E$ cad $f = f^*$.

Interprétation matricielle :

f autoadjoint ssi la matrice qui le représente dans une base orthonormée est symétrique

Thm spectral : Soit f un endo autoadjoint de E.

1) Les valeurs propres de f sont toutes réelles

2) f est diagonalisable

3) Les sous espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux

définitions : Soit A une matrice inversible

A est une matrice orthogonale [noté $A \in O_n(\mathbb{R})$] (resp. unitaire, noté $A \in U_n(\mathbb{C})$) si $A^{-1} = {}^tA$ (resp $A^{-1} = {}^t\bar{A}$) cad $A^{-1} = A^*$.

Interprétation matricielle du Thm spectral

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ (resp $H_n(\mathbb{C})$). Il existe alors $U \in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $U \in U_n(\mathbb{C})$) tq $A' = {}^tUAU$ (resp $A' = {}^t\bar{U}AU$) soit diagonale réelle

Thm pseudo-réduction simultanée

Soient H, N deux matrices symétriques (resp. hermitiennes) tq la matrice H soit définie positive ($\forall X \in \mathbb{K}^n$, ${}^tXHX > 0$) $X \neq 0$

Alors il existe une matrice C inversible tq ${}^tCHC = I_n$, ${}^tCNC = D$ (resp ${}^t\bar{C}HC = I_n$, ${}^t\bar{C}NC = D$) où D est une matrice diag. réelle

③ Etude du spectre d'une matrice hermitienne

Soit H une matrice hermitienne, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres réelles rangées dans l'ordre croissant, comptées avec leurs multiplicités.

$$\boxed{\lambda_k = \min_{\dim F = k} \ \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* H x}{\|x\|_2^2}}$$

Application : Soit $H \in H_{n-1}$ et $\alpha \in \mathbb{C}^{n-1}$, $a \in \mathbb{R}$

Soit $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de H

et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ celles de la matrice hermitienne $H' = \begin{pmatrix} H & \alpha \\ \alpha^* & a \end{pmatrix}$

On a alors : $\mu_1 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \mu_j \leq \lambda_j \leq \mu_{j+1} \leq \dots$

proposition : Soit $H \in H_n$, une matrice hermitienne semi-définie positive. Alors $\det H \leq \prod_{j=1}^{n} h_{jj}$ Inégalité d'Hadamard

Si $H \in H_n^{++}$, l'égalité n'a lieu que si H est diagonale

④ Décomposition polaire

Thm décomposition polaire :

- $\forall M \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists!\,(H,Q) \in H_n^{++} \times U_n$ tq $M = HQ$.
- Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $(H,Q) \in S_n^{++} \times O_n$.

L'application $M \mapsto (H,Q)$ est appelée <u>décomposition polaire</u> de M est un homéomorphisme entre $GL_n(\mathbb{C})$ et $H_n^{++} \times U_n$ (resp. entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++} \times O_n$).

- On définit l'application exponentielle : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$
$$A \mapsto \exp A = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

<u>Application</u> : $SL_2(\mathbb{R}) \simeq SO_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$.

avec : $SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}), \det M = 1\}$, $SO_2(\mathbb{R}) = \{M \in O_2(\mathbb{R}), \det M = 1\}$

En effet, la décomposition polaire induit un isomorphisme
$$SL_2(\mathbb{R}) \simeq SO_2(\mathbb{R}) \times (S_2^{++} \cap SL_2(\mathbb{R})).$$

De plus : $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$ $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$

d'où $(S_2^{++} \times SL_2(\mathbb{R})) \simeq \{H \in S_2 \,,\, \operatorname{tr} H = 0\}$
$$\simeq \mathbb{R}^2.$$

<u>proposition</u> : L'application $\exp : H_n \to H_n^{++}$ est un homéomorphisme.

II) Formes bilinéaires symétriques, formes hermitiennes, formes quadratiques.

① Formes bilinéaires, formes sesquilinéaires.

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

<u>déf</u> : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. et $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$.
On dit que φ est une <u>forme bilinéaire</u> si elle est linéaire en ses deux arguments. ↳ (bl)

<u>Ecriture</u> : $n = \dim E$ $\quad B = (e_1, \dots e_n)$ base de E

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \,\varphi(e_i,e_j) = {}^t X M Y \text{ avec } M = (\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

M est la matrice de φ dans la base B.

③

<u>déf</u> : Soit E un $\mathbb{C}$ ev. et $\varphi : E\times E \to \mathbb{C}$ $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$.
On dit que φ est une <u>forme sesquilinéaire</u> si elle est anti-linéaire en sa première variable, et linéaire en sa seconde variable.

<u>Ecriture</u> : Si E est un $\mathbb{C}$ ev., on a :
$$\varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \overline{x_i}\, y_j\, \varphi(e_i,e_j) = {}^t\overline{X} M Y.$$

- Toute forme sesquilinéaire sur $E\times E$ est une forme bilinéaire lorsque E est un $\mathbb{R}$-ev.

<u>déf</u> : Soit φ une forme bilinéaire sur E.
On dit que φ est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
c.a.d <u>ssi</u> la matrice de φ dans une base B de E est <u>symétrique</u>

<u>déf</u> : Soit φ une forme sesquilinéaire sur un $\mathbb{C}$ ev de E.
On dit que φ est à symétrie hermitienne si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$
c.a.d <u>ssi</u> la matrice de φ dans une base B de E est <u>hermitienne</u>

② Formes quadratiques / Formes hermitiennes (car $\mathbb{K} \neq 2$) $\dim E$ finie

<u>déf</u> : On appelle <u>forme quadratique</u> sur E toute application q de la forme : $q : E \to \mathbb{K}$ $\; x \mapsto \varphi(x,x)$, φ forme b.l sym sur E
φ est unique. φ s'appelle la <u>forme polaire</u> de q.

<u>Définition</u> B base de E. La matrice de q dans la base B est la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B, et rang de q le rang de cette matrice. matrice de q : $\begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_n,e_1) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$

<u>déf</u> : On appelle <u>forme hermitienne</u> sur un $\mathbb{C}$-ev E, toute application de la forme $\Phi : E \to \mathbb{R}$ $\; x \mapsto \varphi(x,x)$ où φ est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne. φ est unique

③ <u>Réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés.</u>

- <u>Thm Sylvester</u> : (Cas Euclidien). $n = \dim E$, q forme quadratique sur E
Il existe une base $\{e_i\}$ de E tq si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :
$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 \qquad M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$
où $r = \operatorname{rang}(q)$, p un entier qui ne dépend que de q et non de la base de E choisie.

On appelle <u>signature de q</u>, le couple $(p, r-p)$, noté $\operatorname{sign}(q)$

- <u>Thm Sylvester</u> : (cas hermitien). $\dim E = n$ $\; R$ forme hermitienne sur E
Il existe alors une base (orthogonale) $\{e_i\}$ de E tq si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$
$$R(x) = |x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_r|^2.$$

↳ Cette décomposition en carrés est obtenue par la <u>Méthode de Gauss</u> ④

↳ comptage de racines

App. 1 ... • Classification affine des con...s. (dans le plan).
signature : (2,0) ou (0,2) ellipse / (1,1) hyperbole / (1,0), (0,1) parabole.

• Détermination du nombre de racines distinctes d'un polynome.

Soit f un polynome réel, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ ses racines distinctes de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_q$. $f(z) = a_0(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2} \dots (z-\alpha_q)^{m_q}$.
On considère les sommes de Newton. $s_p = \sum_{j=1}^{q} m_j \alpha_j^p$. $(p = 0,1,2 \dots)$
et les formes de Hankel : $S_n(x,x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i x_k$. $(n \geq q)$.

Thm : Le nbre de toutes les racines distinctes de $f(z)$ et le nombre de toutes les racines réelles distinctes sont respectivement égaux au rang et à la signature de la forme $S_n(x,x)$

④ Formes quadratiques définies positives

déf : Une forme quadratique q, de forme polaire φ est dite définie positive (resp. définie négative) si $\forall x \neq 0$, $\varphi(x,x) > 0$ ($\varphi(x,x) < 0$)

On note : $D_k = \begin{vmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \dots & \varphi(e_1,e_k) \\ \varphi(e_k,e_1) & \dots & \varphi(e_k,e_k) \end{vmatrix}$ $k \in [\![1,n]\!]$.

Thm : Une forme quadratique est définie positive ssi $D_1 > 0 \dots D_n > 0$
Une forme quadratique est définie négative ssi $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots (-1)^n D_n > 0$

Application : * Recherche d'extrema :

prop : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, supposons qu'il existe $a \in U$ tq $df_a = 0$ de sorte que d'après Taylor Young
$f(a+h) = f(a) + \frac{Q(h)}{2} + o(\|h\|^2)$ où Q forme quadratique

$$Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{i<j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

alors : 1) Si f admet un min (resp. un max) relatif en a, Q est une forme quadratique positive (resp. négative)
2) Si Q est une forme quadratique définie positive (resp. déf nég) f admet un min (resp. un max) relatif en a

Dire que la f.q Q est positive (resp. déf positive) c'est dire que la matrice hessienne A de f, $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{ij}$ $({}^tA = A)$ au point critique a est positive (resp déf positive) ou encore que les valeurs propres de A sont ≥ 0 (resp > 0)

exemple : dim 2. Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ A symétrique $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$
On suppose $\det A = rt - s^2 > 0$. d_1 et d_2 ont le même signe
De plus, $\operatorname{tr} A = d_1 + d_2 = r + t$, or r et t ont le même signe, $d_1 + d_2$ ont le signe de r donc d_1 et d_2 ont le signe de r.

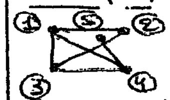
En résumé, si $d_1 \dots > 0$, A déf pos (resp déf nég) ssi $r > 0$ (resp. $r < 0$)
Si $\det A < 0$, $d_1 d_2 < 0$ donc A n'est ni positive, ni négative
• $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f \, C^2$ $df_a = 0$. Posons $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$
- si $rt - s^2 > 0$, $r > 0$, f min rel en a.
- si $rt - s^2 > 0$, $r < 0$, f max rel en a
- si $rt - s^2 < 0$, pas d'extremum en a.
- si $rt - s^2 = 0$ on ne peut rien conclure
* Matrices de Gram.

III Applications

• en combinatoire (théorie des graphes)

Un graphe est constitué de sommets dont certains sont reliés par des arêtes. On se limite au cas des graphes non orientés, c.a.d. toute arête du graphe étudié peut être parcourue dans les 2 sens.

exemple :



La matrice associée à un graphe non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice A symétrique de dimension $n \times n$, où le terme a_{ij} est le nombre d'arêtes reliant i et j

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Théorème du politicien

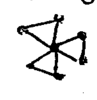
Dans un groupe d'individus, supposons que toute paire de personnes ait exactement un ami en commun. Alors il y a toujours un individu "le politicien" qui est ami avec tout le monde.

• individus = sommets
• une arête relie deux amis (amitié réciproque, graphe non orienté)

Traduction du thm en langage "théorie des graphes"

Soit G un graphe fini dans lequel deux sommets ont exactement un voisin commun. Il existe alors un sommet adjacent à tous les autres sommets

Solution : Ce théorème peut être seulement interprété comme un graphe "moulin à vent"



• en analyse numérique.

→ méthode itérative de résolution de systèmes linéaires
A inversible. On cherche u tq $Au = b$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $b \in \mathbb{R}^n$.
On décompose $A = \begin{pmatrix} D & -F \\ -E & \end{pmatrix}$.

Méthode de relaxation. $\omega \in \mathbb{R}$ $\omega \neq 0$

récurrence : $\left(\frac{D}{\omega} - E\right) u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right) u_k + b$

prop : Si la matrice A est hermitienne définie positive, la méthode de relaxation converge si $0 < \omega < 2$.

Ref

Gourdon

Serre

Gantmacher · Théorie des matrices

Grifone ·

Aigner - Raisonnement divins ·