# Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dim 2 et 3

$E$ sera un espace affine euclidien de dim $n$ de direction $\vec{E}$.
On supposera connu les résultats sur le groupe orthogonal $O(\vec{E})$

## I Le groupe des isométries.

### 1) Présentation du groupe.

**Déf**: $E, F$ 2 espaces affines euclidiens. $f : E \longrightarrow F$ est une <u>isométrie</u> (ssi) $\forall (M,N) \in E$, $MN = f(M)f(N)$.

**Thm**: $f$ est une isométrie de $E$ dans $F$ (ssi) sa partie linéaire $\vec{f}$ est une application orthogonale de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$. Toute isométrie entre 2 espaces affines euclidien de même dimension est bijective.

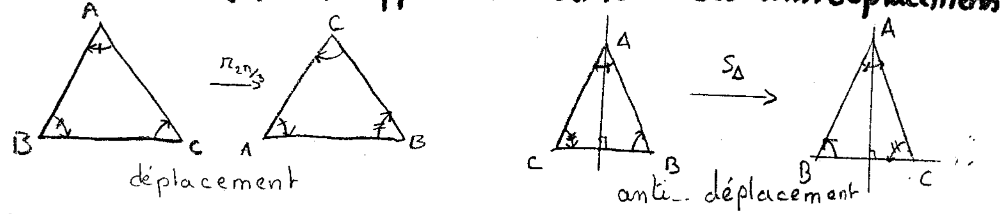
**Déf**: On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application $t_{\vec{u}} : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto M' \end{array}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

**Thm**: $T(E) = \{t_{\vec{u}} / \vec{u} \in \vec{E}\}$ et $(T(E), \circ)$ est isomorphe à $(\vec{E}, +)$

**Exemple**: Les translations et les rotations vectorielles sont des isom.

**Prop**: * $Is(E) = \{$Isométries de $E\}$ est un groupe pour la loi de composition
* $Is^+(E) = \{f \in Is(E) \setminus \vec{f} \in O^+(E)\}$ est un sous groupe de $Is(E)$ appelé le groupe des déplacements.
* $Is^-(E) = Is(E) \setminus Is^+(E)$ est appelé l'ensemble des antidéplacements

**Illust**:




**Thm**: Soit $O \in E$. On note $Is_O(E) = \{f \in Is(E) / f(O) = O\}$ le sous groupe d'isotropie de $O$ dans $Is(E)$. Alors $\phi : \begin{array}{l} Is_O(E) \longrightarrow O(\vec{E}) \\ f \longmapsto \vec{f} \end{array}$ est un isomorphisme de groupe

**Thm**: Soit $O \in E$. Toute isométrie $f$ s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g$ où $g \in Is_O(E)$ et $t_{\vec{u}}$ est une translation.

### 2) Détermination des isométries. Générateurs du groupe

**Notation**: Soit $\vec{f} \in O(\vec{E})$. On pose $Inv\,\vec{f} = Ker(\vec{f} - Id)$.

**Thm**: Toute isométrie affine $f$ s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g$ où $\vec{u} \in Inv(\vec{f})$, $g \in Is(E)$ et possède au moins un point fixe. (DVLPT)

**Cor**: Si $inv(\vec{f}) = \{0\}$ alors $f$ admet un unique point invariant.

**Cor**: $f \in Is(E)$. L'ensemble $I$ des points de $E$ où $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \longmapsto \|Mf(M)\|^2 \end{array}$ atteint sa borne inférieure n'est pas vide. Si $f = t_{\vec{u}} \circ g$ alors $I = Inv(\vec{g})$

**Cor**: $f \in Is(E)$ est une translation (ssi) $\|\overrightarrow{Mf(M)}\|$ est une constante indépendante de $M$

**Cor**: Le centre du groupe $Is(E)$ est réduit à $\{Id\}$

**Thm**: $f \in Is(E)$ alors $f$ est déterminé par les images de $(n+1)$ points affinement indépendants

**Déf**: Une réflexion de $E$ est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $E$.

**Thm**: Soit $f \in Is(E)$. $f$ est produit d'au plus $(n+1)$ réflexions et d'au moins : - $s = \dim(E) - \dim(Inv(\vec{f}))$ réflexions si $f$ admet un pt fixe. $s+2$ réflexions sinon.

**Thm**: $Is(E)$ est engendrée par les translations, les rotations et les sym (*)

**Thm**: Si $s \in Is^-(P)$, l'application $\begin{array}{l} Is^+(P) \longrightarrow Is^-(P) \\ f \longmapsto s \circ f \end{array}$ est une bijection.

## II Classifications des isométries du plan et de l'espace.

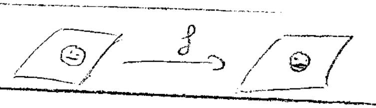
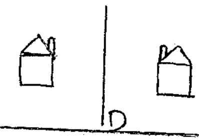
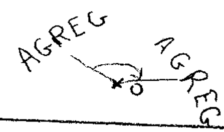
### 1) Isométries planes.

**Déf**: Une rotation affine de $E$ est une application affine de partie linéaire une rotation vectorielle et possèdant au moins un point invariant.

**NB**: En dimension 2, l'angle de la rotation affine est égale à l'angle de sa partie linéaire.

**Def**: On appelle réflexion glissée, toute isométrie de la forme $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$ ou $s_D$ est une symétrie par rapport à $D$ et $\vec{u} \in \vec{D}$.

**Thm**: Une réflexion glissée $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$ possède au moins un point fixe ssi $\vec{u} = \vec{0}$.

| Inv $f$ | Nature | Exemple |
|---|---|---|
| Plan | Identité |  |
| Droite | Réflexion |  |
| Point | Rotation (distincte de l'identité) |  |
| Vide | Transplation Reflexion glissée. |  |



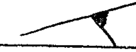
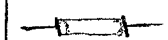
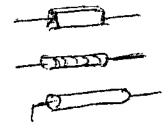
## 2) Isométrie de l'espace.

**Prop**: Si $r$ est une rotation affine distincte de l'identité alors $Inv(r)$ est une droite appelée axe de la rotation.

**Def**: On appelle vissage, toute isométrie de la forme $f = t_{\vec{u}} \circ r_D$ ou $r_D$ est la rotation d'axe $D$ et $\vec{u} \in \vec{D}$.

**Def-prop.**: Trois réflexions $s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ s_{H_3}$ peuvent s'écrire sous forme réduite $r_D \circ s_P$ ou $r_D$ est une rotation d'axe $D$ et $P$ le plan orthogonal à $D$. On dit alors que $r_D \circ s_P$ est une symétrie - rotation.

**Illustration** (Cinématique du solide) : La cinématique du solide est l'étude des mouvements d'un solide indéformable donc de ses isométries. Les liaisons en sciences industrielles sont donc des exemples d'isométries.

| Inv $f$ | Nature | Liaison | Schéma. |
|---|---|---|---|
| Espace | Identité | Encastrement |  |
| Plan | Réflexion | x | x |
| Droite | Rotation ($\neq Id$) | Pivot |  |
| Point | Symétrie-rotation<br>Double rotation | x<br>Rotule ou<br>Rotule à doigt |  ou |
| Vide | Translation<br>Vissage<br>Translation-rotation<br>Reflexion glissée | Glissière<br>Glissière hélicoïdale<br>Pivot glissant<br>x | <br>x |

## III Isométries conservant une partie finie du plan.

### 1) Motivations - généralités.

**Def**: Soit $P \subset E$. On dit qu'une isométrie de $P$ dans $E$ conserve la partie $P$ ssi $f(P) = P$.

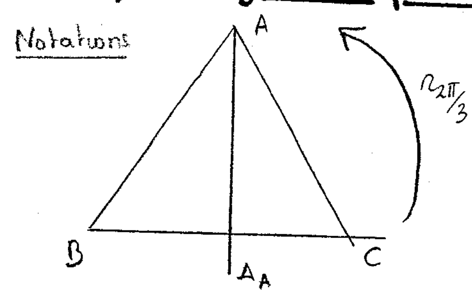
**Thm**: Toute isométrie laissant une partie finie $P = \{A_0, \dots A_n\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre $O$ des pts $A_0, \dots, A_{n-1}$.

**Thm**: Si $P$ est une partie finie du plan de cardinal $n \geq 2$, le groupe des isométries de $P$ est finie et de plus $|Is^+(P)| \leq n$ et $|Is(P)| \leq 2n$.

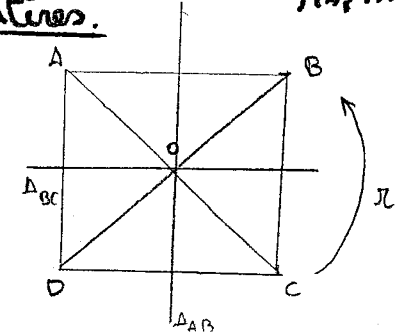
**Thm**: Soit $P = \{A_1, \dots A_n\}$, une partie finie d'un espace affine euclidien. L'application $\phi : Is(P) \longrightarrow S_n$, $f \longmapsto \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ f(A_1) & \dots & f(A_n) \end{pmatrix}$ est un homomorphisme de groupe.

### 2) Triangles et quadrilatères.

Notations







| P : Partie de $E$ | $Is(P)$ | $Is^+(P)$ |
|---|---|---|
| Triangle quelconque | $\{Id\}$ | $\{Id\}$ |
| Triangle isocèle (en A) | $\{Id, s_{\Delta_A}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\{Id\}$ |
| Triangle équilatéral | $\{Id, r_{2\pi/3}, r_{4\pi/3}, s_{\Delta_A}, s_{\Delta_B}, s_{\Delta_C}\} \simeq \mathfrak{S}_3$ | $\{Id, r_{2\pi/3}, r_{4\pi/3}\} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ |
| Parallèlogramme | $\{Id, s_0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\{Id, s_0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ |
| Losange | $\{Id, s_0, s_{AC}, s_{BD}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\{Id, s_0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ |
| Rectangle | $\{Id, s_0, s_{D_{AB}}, s_{D_{BC}}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\{Id, s_0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ |
| Carré | $\{Id, r, r^2, r^3, s_{AC}, s_{BD}, s_{\Delta_{AB}}, s_{\Delta_{BC}}\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\{I, r, r^2, r^3\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ |

3) Polygônes réguliers.

Def : On considère $n$ points $A_0, A_1, \dots A_{n-1}$ du plan. On note commodément $A_k = A_m$ dès que $k$ est congru à $m$ modulo $n$ et on suppose que 3 points consécutifs $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$ quelconques ne sont pas alignés. On appelle polygone $\mathcal{P}$ de sommets $A_0, A_1, \dots A_{n-1}$ la famille formée de tous les segments $[A_0A_1], \dots, [A_{n-2}, A_{n-1}], [A_{n-1}, A_0]$. On note $\mathcal{P} = A_0 \dots A_{n-1}$. Les $[A_i; A_{i+1}]$ sont appelés cotés du polygone et $\mathcal{S} = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ ses sommets

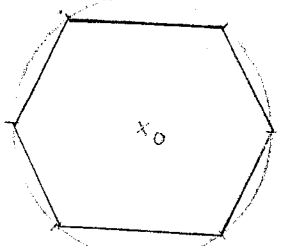
Prop : $Is(\mathcal{P}) \subset Is(\mathcal{S})$.

Thm : Soient $n \geq 3$ et $\mathcal{P}_n = A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ un polygone à $n$ sommet distincts deux à deux. Il y a équivalence entre :

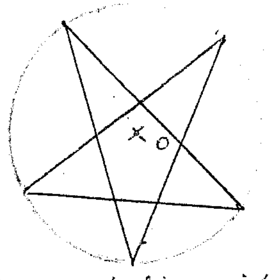
1) $\mathcal{P}_n$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et $A_k A_{k+1} = A_0 A_1 \ \forall k$

2) Il existe une rotation $r$ telle que $r(A_k) = A_{k+1}$, pour tout $k$.

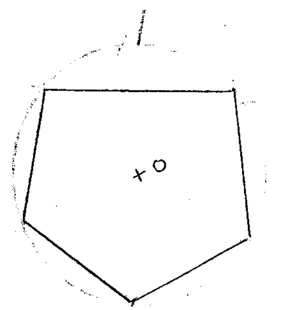
Si $\mathcal{P}_n$ vérifie une des deux relations ci dessus, on l'appelle polynome regulier.



Hexagone regulier convexe



Pentagone regulier croisé



Pentagone regulier conv

Thm : Soit $\mathcal{P}_n$ un polygone régulier à $n$ sommets et $r$ une rotation associé à $\mathcal{P}_n$.

1) Le centre $O$ du cercle passant par les sommets de $\mathcal{P}_n$ est égal à l'isobarycentre des sommets.

2) L'angle $\theta$ de $r$ est de la forme $\theta = s\frac{2\pi}{n} [2\pi]$ où $s$ est un nombre premier avec $n$, et compris entre 1 et $n$.

$\mathcal{P}_n$ est désormais un polygone régulier à $n$ cotés

$Is^+(\mathcal{P}_n) = \{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

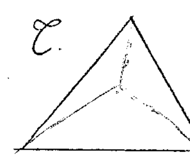
Thm : Il y a exactement $n$ réflexions laissant $\mathcal{P}_n$ global. invariant, ce sont les réflexions de base les droites $(OA_k)$ ou les médiatrices $\Delta_k$ des arêtes $[A_k A_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n)$.

Def : $Is(\mathcal{P}_n)$ est appelé le groupe diédral d'indice $n$ noté $D_n$

Thm : Le groupe diédral $D_n$ d'indice $n$ est un groupe fini d'ordre $2n$, engendré par un élément $r$ d'ordre $n$ et un élément $s$ d'ordre 2. (DULPTTT)

## IV Les polyèdres réguliers.

Motivation : - Création de dés
- Vision des groupes
- Théorie des tresses

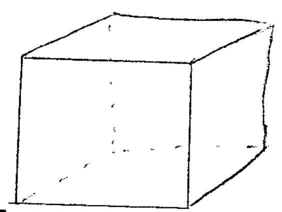


$\mathcal{T}$

Le Tétraèdre.

$Is^+(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}_4$

$Is(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{S}_4$



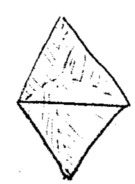
$\mathcal{C}$

Le cube

$Is^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$

$Is(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(OVPT)



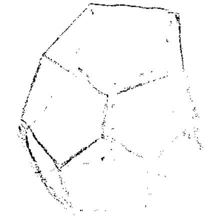
$\mathcal{O}$

L'octaèdre

$Is^+(\mathcal{O}) \simeq \mathfrak{S}_4$

$Is(\mathcal{O}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Le dodécaèdre



$\mathcal{D}$

L'icosaèdre

$\mathcal{I}$ (cf cours d'hier)

$Is^+(\mathcal{D}) \simeq Is^+(\mathcal{I}) \simeq \mathcal{A}_5$

$Is(\mathcal{D}) \simeq Is(\mathcal{I}) \simeq \mathfrak{S}_5$

# Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite - Applications en dim 2 et 3

## Bibliographie.

La leçon est basée en très grande partie sur :
- Mercier, cours de géométrie pour le capes et l'Agregation.
- Ladegaillerie, Géométrie elémentaire affine et projective

Pour compléter le cours, aller plus loin :
- Berger, Géométrie (Tome 1 - Tome 2 pour les polyèdre)
- Tauvel

Pour le nom des liaisons :
Sciences Industrielles - Mécanique MPSI.

## Développements :

-> Décomposition des isométries affines.
-> Groupe diédral.
-> Groupe du cube.
- Groupe de n'importe quel polyèdre.

## Extension(s).

-> Faire des rappels sur le groupe orthogonal au début (mais attention, ce n'est pas l'objet de la leçon).
- Groupe des frises, groupe des pavages (Présenté notamment dans Berger et Ladegaillerie).