Isom[illegible]ies d'un espace affine euclidie[illegible]e dimension finie. For[illegible] réduites. Applications en dimensions 2 ou 3.

Cadre : On considère un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension finie $n \geq 2$, de direction un $\mathbb{R}$-ev $(E, \|.\|)$.

I) Définitions et premiers résultats.

Déf | On appelle isométrie de $\mathcal{E}$ toute application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui conserve les distances, c.a.d $\forall M, N \in \mathcal{E}$, $\|\vec{MN}\| = \|f(M)f(N)\|$.

Expl |
- Une translation est une isométrie.
- Une homothétie n'est pas une isométrie (sauf si rapport $= \pm 1$)
- Une réflexion, c.a.d une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est une isométrie
- Un retournement, c.a.d une symétrie orthogonale par rapport à un espace de codimension 2 est aussi une isométrie

Thm | "Caractérisation des isométries de $\mathcal{E}$".
Pour une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, on a l'équivalence suivante :
f est une isométrie $\Leftrightarrow$ f est affine et l'application linéaire associée $\vec{f}$ est orthogonale.

Une isométrie de $\mathcal{E}$ est donc toujours bijective.

On peut déduire ce thm d'un lemme plus général :

Lemme | Si Q est une forme quadratique non dégénérée sur E et si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ vérifie pour tout $M, N \in \mathcal{E}$,
$$Q(f(M)f(N)) = Q(\vec{MN}).$$
Alors f est une bijection affine

[illegible] • Si Q est définie positive, alors on peut appliquer le lemme pour déduire que si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie alors elle est affine (même bijective).

Expl | • En relativité, on considère l'espace temps $\mathbb{R}^4$ muni de la forme quadratique non dégénérée $x^2+y^2+z^2-t^2$ qui définit une "distance relativiste" entre deux évènements $M(x_i, y_i, z_i, t_i)$ $(i=1,2)$ par
$$\delta(M_1, M_2) = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 - (t_1-t_2)^2.$$
Les transformations qui conservent cette "distance" sont nécessairement affines

[illegible] • Les isométries conservent les angles non orientés.

Notations | • On note $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$.
• $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$) est le sous ensemble de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ formé des déplacements (ou isométries directes : $\det \vec{f} = 1$) (resp. de $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$ formé des anti-déplacements (ou isométries indirectes : $\det \vec{f} = -1$)).

Prop | $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ forme un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$: les bijections affines de $\mathcal{E}$.
C'est l'image réciproque du sous-groupe des isométries vectorielles $O(E)$ par l'homomorphisme de groupe :
$$GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$$
$$f \mapsto \vec{f}.$$
On a, par ailleurs, $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ est un sous groupe (distingué) de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$.

⚠ $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$ n'est pas un sous groupe de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$.

Prop | • Le groupe $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ des déplacements est connexe par arcs.
• Par contre, $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ a deux composantes connexes.

Rque | * Cette proposition justifie l'emploi du mot "déplacement" pour ces isométries : un chemin reliant l'application identique au déplacement f permet de déplacer (au sens français courant) un objet.

Expl | Expression matricielle des isométries

Si on fixe dans $\mathcal{E}$ un repère $(O, (e_i)_i)$ orthonormé et $M \in \mathcal{E}$ repéré par la matrice colonne de ses composantes (x_i), alors une application $M(x_i) \mapsto M'(x_i)$ est une isométrie si et seulement si on a :
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ avec } A \in O(n), \; b_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}, x'_i \in \mathbb{R}$$

• L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{3}(2+2x+2y-z), \tfrac{1}{3}(1-x+2y+2z), \tfrac{1}{3}(2x-y+2z)\right)$$
est un vissage, c'est à dire la composée d'une rotation par rapport à un axe et d'une translation

→ L'axe de vissage est d'équation $\begin{cases} 3x - 3z = 1 \\ 3y - 3z = \cancel{1} -1 \end{cases}$

→ L'angle de rotation est $-\pi/3$.

→ Le vecteur de translation est : $\vec{u} = (1/3, 1/3, 1/3)$.

II) Déc[omposition] et classification des isométries

① Théorème fondamental et résultats

Thm | Décomposition canonique des isométries.
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, alors il existe un couple unique (g, t_a) où g est une isométrie ayant un ensemble non vide G de points fixes et où t_a est une translation de vecteur $a \in \vec{G}$ tel que $f = t_a \circ g$.
Cette décomposition est de plus commutative :
$f = g \circ t_a$ et $\vec{G} = \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E)$.

Remarque : La preuve de ce théorème donne un moyen pratique de trouver a : C'est la projection orthogonale pour tout $M \in \mathcal{E}$ de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E)$.

Corollaire | • Avec les notations du thm précédent on a : $f = g$ et $a = 0 \iff f$ a un point fixe (au moins)

Prop | • Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$. $f = t_a \circ g$ (décomposition canonique de f)
Alors l'ensemble des points fixes de g coïncide avec l'ensemble des points M minimisant la distance $\|\overrightarrow{Mf(M)}\|$.
On en déduit une caractérisation des translations :

Corollaire | • Une isométrie f est une translation ssi la quantité $\|\overrightarrow{Mf(M)}\|$ est une constante indépendante du choix de M.

Corollaire | • Le centre du groupe $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est réduit à $\{Id\}$

② Réduction des endomorphismes orthogonaux

Thm | Réf : Tisseron.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension $n \geq 2$ et $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

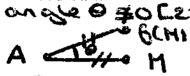
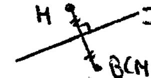
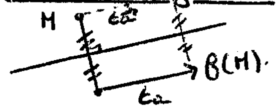
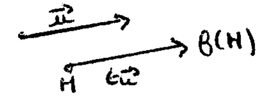
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_r} \end{bmatrix}$$

où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ $\quad \theta_i \not\equiv 0 \; [\pi]$.

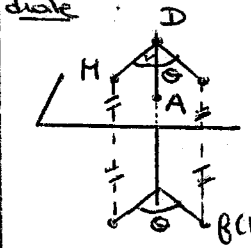
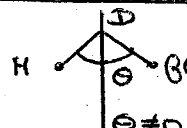
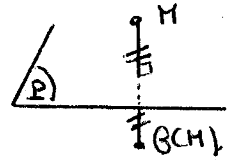
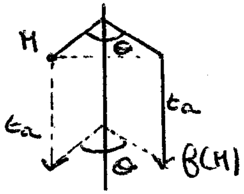
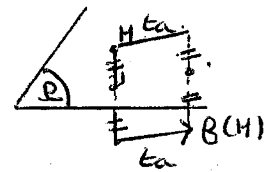
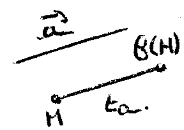
où $p = \dim \operatorname{Ker}(u - Id_E)$, $q = \dim \operatorname{Ker}(u + Id_E)$

$p + q + 2r = n$.

③ Classification des isométries en dimension 2.

	$\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E) = 0$ DEPLACEMENT	$\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E) = 1$ ANTI-DEPLACEMENT	$\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E) = 2$ DEPLACEMENT.
avec points fixes	• rotation de centre A, d'angle $\theta \not\equiv 0 \, [2\pi]$.  • si $\theta \equiv \pi \, [2\pi]$ c'est un retournement. • un point fixe : centre A	• réflexion (par rapport à une droite).  L'ensemble des points fixes est la droite D.	• identité sur $\mathcal{E}$
sans point fixe.	X	• symétrie glissée 	• translation. 

④ Classification des isométries en dimension 3

	$\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E) = 0$ ANTI-DEPLACEMENT	$\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E) = 1$ DEPLACEMENT	$\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E) = 2$ ANTI-DEPLACEMENT	$\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E) = 3$ DEPLACEMENT
avec points fixes.	rotation autour d'une droite composée avec une réflexion par rapport à un plan orthogonal à cette droite  un seul point fixe : A	rotation autour d'une droite  $\theta \not\equiv 0 \, [2\pi]$. L'ensemble des points fixes est la droite D. Si $\theta \equiv \pi \, [2\pi]$, c'est un retournement.	réflexion (par rapport à un plan).  L'ensemble des points fixes est le plan P.	Identité L'ensemble des points fixes est $\mathbb{R}^3$.
Sans point fixe.	X	vissage.  $\theta \not\equiv 0 \, [2\pi]$.	composée d'une réflexion et d'une translation 	translation 

Rmq | Une isométrie f est un déplacement ssi $\dim E$ et $\dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_E)$ ont la même parité.

III Générateurs des groupes $Is(\mathcal{E})$ et $Is^+(\mathcal{E})$.

Thm | "Décomposition en réflexion dans $Is(\mathcal{E})$"

Soit $f \in Is(\mathcal{E})$. Posons $p = \dim \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_E)$.
et soit F l'ensemble des points fixes de f.
Alors f peut s'écrire comme produit de réflexions en nombre $n-p$ si $F \neq \emptyset$ et $n-p+2$ si $F = \emptyset$.

Thm | "Décomposition en retournements dans $Is^+(\mathcal{E})$".

Soit $f \in Is^+(\mathcal{E})$. Posons $p = \dim \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_E)$.
Alors $n-p$ est pair avec $n = \dim E \geq 3$ dans ce théorème
- Si f est une translation, f est un produit de deux retournements.
- Dès que $n \geq 3$, f est un produit de $n-p$ retournements.

Expl | • Cas du vissage f ($f \in Is^+(\mathcal{E})$)

* décomposition en réflexions de f.

→ La composante de rotation se décompose en deux réflexions s_1 et s_2. s_1 est la réflexion par rapport à un plan quelconque P_1 contenant l'axe D de la rotation et s_2 est la réflexion par rapport au plan P_2 déduit du plan P_1 par la rotation d'axe D et d'angle $\theta/2$.

→ La composante de translation se décompose en deux réflexions s_3 et s_4. s_3 est la réflexion par rapport à un plan quelconque P_3 orthogonal au vecteur a de translation et s_4 est la réflexion par rapport au plan P_4 déduit du plan P_3 par la translation de vecteur $\frac{a}{2}$.

f s'écrit alors comme le produit de 4 réflexions

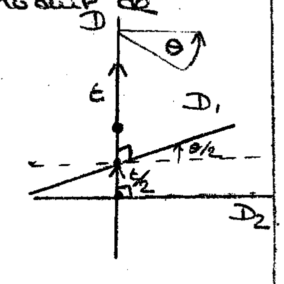
$$f = s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1.$$

En effet, comme l'ensemble des points fixes de f est vide, le théorème affirme que f s'écrit comme produit de $3 - 1 + 2 = 4$ réflexions

* décomposition en retournements de f.

f se décompose en produit de deux retournements d'axes D_1 et D_2.

$n - p = 3 - 1 = 2$ retournements.

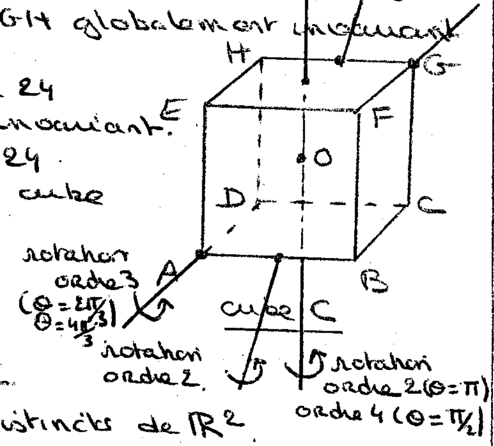


IV Exemples et applications.

① Groupe des isométries du cube

On cherche à déterminer l'ensemble des isométries affines laissant le cube $C = ABCDEFGH$ globalement invariant.
On note O l'isobarycentre de C

Thm | • Dans $Is^+(\mathcal{E})$, il y a 24 rotations laissant le cube invariant.
• Dans $Is^-(\mathcal{E})$, il y a 24 antidéplacements laissant le cube invariant.



② Un exercice amusant

Soient $M_1, \dots M_n$, n points distincts de $\mathbb{R}^2$.
→ Trouver n points $A_1, \dots A_n$ tels que :
* M_1 soit le milieu de $[A_1 A_2]$
* M_2 soit le milieu de $[A_2 A_3]$ ...
⋮
* M_n soit le milieu de $[A_n A_1]$.

③ Application à la théorie des courbes

Thm | "Théorème fondamental de la théorie des courbes".
Soient deux fonctions régulières $k : I \to]0, +\infty[$ et $\tau : I \to \mathbb{R}$.
Alors il existe une courbe régulière $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par l'abscisse curviligne telle que k et τ soient respectivement la courbure et la torsion de α. De plus, toute autre courbe $\bar{\alpha}$ qui satisfait aux mêmes conditions diffère de α d'un déplacement
c.a.d : $\exists \rho \in O^+(\mathbb{R}^3)$, $\bar{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$.

④ Classification euclidienne des coniques

On recherche les orbites de l'action du groupe des isométries sur l'ensemble des coniques $\mathcal{E}$, définies par des équations de la forme $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$

$\dim \mathcal{E} = 2$

$$Is(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$
$$(f, \mathcal{E}_1) \mapsto f \cdot \mathcal{E}_1$$

où $f(x,y) = A\binom{x}{y} + B = \binom{X}{Y}$

$\mathcal{E}_1$ définie par $c(x,y) = 0$; $f \cdot \mathcal{E}_1$ définie par $c(X,Y) = 0$

Références

- Dany-Jack Mercier, Cours de géométrie. Préparation au CAPES et à l'agrégation.
- Michèle Audin, Géométrie.
- Claude Tisseron, Géométrie affine, projective et euclidienne.

Développements

1) Le théorème fondamental et quelques résultats associés
2) Générateurs de $Is(\mathcal{E})$ et $Is^+(\mathcal{E})$
3) Groupe des isométries du cube.