101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

I] Définitions et exemples

Déf: Une action (à gauche) de G un groupe sur X un ensemble est la donnée d'un homomorphisme de groupe $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$. On note $g\cdot x = \varphi(g)\cdot x$ [Ar-F]

Prop: . Si $H \subset G$ est un sous groupe et X un G-ensemble, H agit sur X par restriction.

. Si $\pi : X \twoheadrightarrow S$ et X un G-ensemble tel que $\forall x,y \in X$ $\pi(x)=\pi(y) \Rightarrow \forall g \in G$ $\pi(g\cdot x) = \pi(g\cdot y)$

Alors G agit sur S $\quad g\cdot s = \pi(g\cdot x)$ si $x \in \varphi^{-1}(s)$

Ex: $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\{1,\dots,n\}$, sur l'ensemble des parties à p éléments de $\{1,\dots,n\}$ [ALE].

. $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}^n$, sur l'ensemble des sev de dimension r.

. Si G est un groupe, G agit sur lui-même par translation à gauche

$H \subset G$ agit par restriction (les orbites sont les classes à droite)

. G un groupe $H \subset G$ ss-groupe $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique

G agit sur lui-même par translation à gauche donc sur G/H.

Déf: X un G-ensemble

. $x \in X$ orbite de x $\quad Gx = \{g\cdot x \,/\, g \in G\}$.

On a une relation d'équivalence sur X : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$ $y = g\cdot x$

Les orbites sont les classes d'équivalence on note X/G leur ensemble.

. $x \in X$ stabilisateur de x $\quad Stab(x) = \{g \in G / g\cdot x = x\} \subset G$ ss-groupe

. $g \in G$ $\quad Fix(g) = \{x \in X, g\cdot x = x\}$. [Ar-F]

. $X^G = \bigcap_{g\in G} Fix(g)$

Prop: Si $y = g\cdot x$ $\quad Stab(y) = g\, Stab(x)\, g^{-1}$

Ex: . Pour l'action de $\langle \sigma \rangle$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ les orbites sont les supports des cycles intervenant dans la décomposition en cycles à support disjoint de σ

. Pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1,\dots,n\}$ $\quad Stab(i) \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$ [ALE]

Déf: X un G-ensemble

. On dit que l'action est transitive s'il n'y a qu'une seule orbite, et simplement transitive si $\forall x,y \in X$ $\exists! g \in G$ $y = g\cdot x$.

. L'action est fidèle si $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ est injectif

Rq: Si $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ est une action, on en déduit une action fidèle

$\tilde{\varphi} : G/\ker\varphi \to \mathfrak{S}(X)$

ex: action fidèle de $PGL(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$

app: $PGL(2,\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$ $\quad PGL(2,\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ $\quad PGL(2,\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$ [PER]

$PSL(2,\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$ $\quad Aut(\mathfrak{S}_6) \neq Int(\mathfrak{S}_6)$

Ex: . $GL(E)$ agit de façon simplement transitive sur les bases de E [ALE]

. $SO(\mathbb{R}^2)$ agit simplement transitivement sur les vecteurs normés

app: définition des angles orientés

. Une structure d'espace affine sur $\mathcal{E}$ est la donnée d'un ev E et d'une action simplement transitive de E sur $\mathcal{E}$.

. Si G est un groupe et $H \subset G$. L'action de G sur G/H par translation est transitive. $\ker\varphi = \bigcap_{a\in G} aHa^{-1}$ est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H. [PER]

. L'action de G sur lui-même par translation à gauche est fidèle

d'où le morphisme injectif de Cayley $\quad G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G)$

app: (th de Frobenius) $H \subset G$ fini tel que $[G:H]$ soit le plus petit diviseur premier de $|G|$. Alors $H \triangleleft G$. [PER p 35]

. L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1,\dots,n\}$ est n-transitive

$\mathfrak{A}_n$ sur $\{1,\dots,n\}$ est $n-2$ transitive $\quad$ app: pour $n \geq 5$ les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$.

Prop: Soit X un G-ensemble

Alors $\forall x \in X$ $\quad G/Stab(x) \longrightarrow Gx$ est une bijection.

Ex: L'action de $SO(n)$ sur S^{n-1} est transitive d'où une bijection entre S^{n-1} et $SO(n)/SO(n-1)$

App: (th de Lagrange) Soit G un groupe fini H un sous groupe

Alors $|H| \mid |G|$

. équation aux classes: $\quad X$ un G ensemble fini

$$|X| = \sum_{x\in X/G} [G : Stab(x)] \left(= \sum_{x \in X/G} \frac{|G|}{|Stab(x)|} \text{ si } |G| < +\infty \right)$$

cor: Si G est un p-groupe $\quad |X^G| \equiv |X| \mod p$ [ALE].

. formule de Burnside G groupe fini X un G-ensemble fini

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |Fix(g)|$$

app: A isomorphisme près il n'y a que cinq types de ss-groupes finis de $SO(3)$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$

II) Applications en théorie des groupes

G un groupe G agit sur lui même par conjugaison $g.h = ghg^{-1}$

$\varphi : G \to Aut_{gr}(G)$ $\ker \varphi = Z(G)$ centre

App: . Si G est fini $|G| = |Z(G)| + \sum_{x\in X/G\setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Stab(x)|}$ app: th de Wedderburn

. Si $|G| = p^\alpha$ p premier

. $|Z(G)| \geq p$

. $\forall\, 0 \leq \beta \leq \alpha$ il existe un sous groupe H de G d'ordre p^β

. demonstration de Mac Kay du théorème de Cauchy   *

Th: Si G est un groupe fini p un facteur premier de $|G|$
G possède un élément d'ordre p [ALE]

Th de Sylow: [ART]

Soit G un groupe fini $n = |G| = p^\alpha m$ avec p premier $p \nmid m$

Alors (i) G contient au moins un p-sous groupe de Sylow

(ii) si $H \subset G$ est un ss-groupe de G et S un p-Sylow de G,
il existe $g \in G$ tel que $gSg^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H.
Donc si H est un p-sous groupe de G il existe un p-Sylow S de G tel que $H \subset S$ et les p-Sylow de G sont tous conjugués

(iii) si n_p est le nombre de p-Sylow de G $n_p | m$ et $n_p \equiv 1 \mod p$

App: . un groupe d'ordre 255 n'est pas simple

. $\mathfrak{A}_5$ est le seul sous groupe simple d'ordre 60

. il y a 5 groupes d'ordre 12.

III] Algèbre linéaire et action de groupe

* décomposition de Bruhat k corps

$\mathcal{T} = \{$ matrices triangulaires supérieures inversibles $\} \subset GL_n(k)$

$\mathcal{U} = \{$ matrices unipotentes supérieures $\} \subset GL_n(k)$

On a une action de $\mathcal{U} \times \mathcal{T}$ sur $GL_n(k)$ $(U,T).M = UMT^{-1}$

Il y a $n!$ orbites dont un système de representants est $\{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

* action de $GL_n(k)$ sur $M_n(k)$

- par conjugaison $P.M = PMP^{-1}$

les orbites sont caractérisées par les invariants de similitude, un système de représentants est $\left\{ \begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_r} \end{pmatrix}, r \in \mathbb{N}^*\ P_1 | \dots | P_r\ \deg P_1 + \dots + \deg P_r = n \right\} \cup \{0\}$
$P_i \in k[X]$ non nul non inversible unitaire

C_{P_i} : matrice compagnon.

- $GL_m(k) \times GL_n(k)$ $(P,Q).M = PMQ^{-1}$ invariant : rang

système de représentants $\left\{ \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq n \right\}$.

- par congruence sur $S_n(k)$ $P.M = PM{}^tP$ app: classification affine des coniques

- $GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{P} = \{ MP_\sigma M^{-1}, \sigma \in \mathfrak{S}_n\ M \in GL_n(k) \}$ par conjugaison

Th: (Brauer) P_σ et P_τ sont dans la même orbite ssi σ et τ sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.

Il y a donc $p(n)$ orbites (nbre de partitions de l'entier n)

* action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ $O.M = OM{}^tO$

système de représentants $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}\ \ \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \right\}$.

app: classification euclidienne des coniques.

* action de $U_n(\mathbb{C})$ sur $H_n(\mathbb{C})$ $U.M = UM{}^t\bar{U}$

système de représentants $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}\ \ \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \right\}$.

IV) Action sur un espace vectoriel

1) Représentation linéaire des groupes finis

Def: G groupe fini   Une représentation linéaire de G est un morphisme $G \to GL(V)$ où V est un $\mathbb{C}$ ev de dim finie appelé degré

Ex: . les représentations de degré 1 sont les morphismes $G \to \mathbb{C}^*$

. Si X est un G-ensemble fini V un $\mathbb{C}$ ev de base $(e_x)_{x\in X}$

$\rho : G \to GL(V)$ $\rho(g)\cdot e_x = e_{g.x}$ est une représentation de degré $|X|$

Si $X = G$ avec l'action par translation à gauche, ρ s'appelle la représentation régulière.

Déf: Une représentation (ρ, V) est dite irréductible si $V \neq \{0\}$ et si elle n'admet pas de sous-espace stable autre que V et $\{0\}$.

Th: (Maschke) $\rho : G \to GL(V)$ une représentation [PEY]

W un sous espace G-stable

Alors W admet un supplémentaire G-stable

App: Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles

Ex: $\mathfrak{S}_3$ agit sur $\{1,2,3\}$ on en déduit une représentation $\rho : \mathfrak{S}_3 \to GL(\mathbb{C}^3)$

$W = Vect(1,1,1)$ est $\mathfrak{S}_3$ stable.

$W' = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 / \ x+y+z = 0\}$ est un supplémentaire $\mathfrak{S}_3$-stable

2) Action sur $k[x_1, \dots, x_n]$ - Invariants

Th: $\mathfrak{S}_n$ agit sur $k[x_1,\dots,x_n]$ $\quad \sigma . P(x_1,\dots,x_n) = P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})$

(i) $\forall P \in k[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ $\exists ! Q \in k[x_1,\dots,x_n]$ $\quad P = Q(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$

(ii) car $k \neq 2$ $\forall P \in k[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{A}_n}$ $\exists ! Q, R \in k[x_1,\dots,x_n]$

$$P = Q(\sigma_1,\dots,\sigma_n) + \Delta R(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$$

avec $\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

Déf: Si $G \subset GL_n(k)$ on définit une action de G sur $k[x_1,\dots,x_n]$

par $\rho(A)(P)(\underline{X}) = P(A^{-1}\cdot \underline{X})$

Th. (Noether) On suppose $G \subset GL_n(k)$ fini

Alors il existe $P_1,\dots,P_s \in k[x_1,\dots,x_n]$ tel que [PEY]

$$k[x_1,\dots,x_n]^G = k[P_1,\dots,P_s]$$

Rq: ce n'est pas nécessairement une algèbre de polynômes

$G = \{\pm I_2\} \subset GL_2(k)$ $\quad k[X,Y]^G = k[X^2, Y^2, XY]$.

Si $G \subset GL_n(k)$ agit sur $k[x_1,\dots,x_n]$ via $g\cdot P(\underline{X}) = P(g^{-1}\cdot\underline{X})$

le sous espace des polynômes homogènes de degré d $Pol_d(k^n)$, qui est un espace vectoriel de dimension finie, (une base est $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} ; i_1 + \dots + i_n = d\}$) est stable

$E = Pol_d(k^n)$ On a donc une action $\rho : G \to GL(E)$

Cette action permet de définir une action $\tilde{\rho}$ de G sur $Pol(E)$ (algèbre des fonctions polynomiales sur E) comme précédemment.

Th: Si $G = SL_n(k)$

l'algèbre des invariants pour cette action est de type fini sur k.

IV] Action sur un espace topologique

G un groupe topologique X un espace topologique séparé

Déf: On dit de G opère continûment sur X si $\varphi : G \to Homeo(X)$ [MT]

vérifie $\begin{array}{l} G\times X \to X \\ (g,x) \mapsto g\cdot x \end{array}$ est continue.

Ex: $GL_n(\mathbb{R})$ agit continûment sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n, $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [ALE]

Prop: . Si G est connexe (resp connexe par arcs) ses orbites sont connexes (resp connexes par arcs) [MT]

. $\forall x \in X$ $\quad Stab(x) \subset G$ est fermé.

. L'application $G/Stab(x) \to Gx$ est continue bijective (avec la topologie quotient et la topologie induite).

App: Les classes de similitude de $M_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs [MT]

l'orbite $GL_n(\mathbb{C}).M$ est fermée ssi M est diagonalisable [GOU]

Rq: L'application $G/Stab(x) \to Gx$ n'est pas nécessairement un homéomorphisme

ex: action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ $\quad t\cdot(\bar{x},\bar{y}) = (\overline{x+t}, \overline{y+\ell t})$ [ALE-MT]

Th: L'application $G/Stab(x) \to Gx$ est un homéomorphisme dans les deux cas suivants: (MT)

(i) $G/Stab(x)$ est compact

(ii) si G est un groupe topologique localement compact et réunion dénombrable de compacts et si $G.x$ est localement compact.

App: . $SL(2,\mathbb{R})$ opère transitivement sur le demi plan de Poincaré $\mathcal{P} = \{Im z > 0\}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad Stab(i) = SO(2,\mathbb{R})$ $\quad$ Donc $\mathcal{P} \simeq SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ [MT]

. $GL_n^+(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de rang $r \leq n-1$ de $M_n(\mathbb{R})$ sont connexes.

Th: (Markov-Kakutani) Soit E un ev euclidien $G \subset GL(E)$ sous groupe compact. G agit sur E. On suppose qu'il existe $K \subset E$ convexe compact G stable [ALE]

Alors $\exists x \in K$ $\forall g \in G$ $g\cdot x = x$

App: Si $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ est un ss-groupe compact, $\exists R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\quad G \subset R\, O_n\, R^{-1}$

Références :
[Ar F] Arnaudies Fraysse Algèbre 1
[PEY] G. PEYRE L'algèbre discrète de la transformée de Fourier
[ALE] M. ALESSANDRI Thème de géométrie (bcp d'exemples dans le chapitre 1)
[MT] MNEIMNE TESTARD Groupes de Lie classiques
[PER] PERRIN Algèbre.