106 : GROUPE LINÉAIRE D'UN ESPACE VECTORIEL E DE DIMENSION FINIE. SOUS-GROUPES DE $GL(E)$. APPLICATIONS.

Dans toute la leçon, E est un espace vectoriel de dimension finie.

I - ÉTUDE ALGÉBRIQUE

1° Définitions

Déf : $GL(E)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$, constitué des endomorphismes inversibles. Il s'agit d'un groupe pour la composition, dit groupe linéaire.
Si $E = \mathbb{K}^n$, on le note $GL_n(\mathbb{K})$.

Prop : Le choix d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E induit un isomorphisme (non canonique) entre $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$.

Prop : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$ est injectif $\Leftrightarrow f$ est surjectif $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.

Rq : M est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det M \in \{+1, -1\} = \mathbb{Z}^\times$.

Exemple : Les matrices de Vandermonde $(x_i^j)_{1 \leq i,j \leq n}$ sont inversibles $\Leftrightarrow$ les x_i sont tous distincts.

Déf : $\det : GL(E) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes. Son noyau est noté $SL(E)$: c'est le groupe spécial linéaire.

2 - Étude des générateurs

Déf : On dit que $u \in GL(E)$ est une dilatation de rapport $\lambda (\neq 1)$ si, dans une certaine base, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$.

On dit que u est une transvection si, dans une certaine base, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Prop : Les transvections sont conjuguées dans $GL(E)$. Pour $n \geq 3$, elles le sont dans $SL(E)$.

Théorème : Les transvections engendrent $SL(E)$. Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

Application : Le centre de $GL(E)$ est constitué des homothéties.
Le centre de $SL(E)$ est constitué des homothéties de rapport une racine n-ème de l'unité.

Déf : Le quotient de $GL(E)$ par son centre est appelé groupe projectif linéaire, noté $PGL(E)$.
Le quotient de $SL(E)$ par son centre est appelé groupe spécial projectif linéaire, noté $PSL(E)$.
Ils agissent naturellement sur l'espace projectif $P(E)$.

Théorème : Le groupe $PSL_n(\mathbb{K})$ est simple, sauf si $(n=2, \mathbb{K} = \mathbb{F}_2)$ ou $(n=2, \mathbb{K} = \mathbb{F}_3)$.

3 - Étude des commutateurs

Théorème : - On a $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$, sauf si $(n=2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2)$.
- On a $D(SL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$, sauf si $(n=2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2)$ ou $(n=2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3)$.

Ces restrictions amènent naturellement au cas où $\mathbb{K}$ est un corps fini.

4 - Cas des corps finis

Prop : On a : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$.
$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-2}) q^{n-1}$.
$|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)|$
$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)| / \mathrm{pgcd}(n, q-1)$

Isomorphismes exceptionnels : On a $SL_2(\mathbb{F}_2) = GL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) = \mathfrak{S}_3$.
$PSL_2(\mathbb{F}_3) = \mathfrak{A}_4$.

Prop : $GL_n(\mathbb{F}_{p^\alpha})$ admet un p-Sylow.

Corollaire : Théorème de Sylow dans le cas général.

Théorème de Frobenius - Zolotarev : Soit V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in GL(V)$. Alors $\varepsilon(u) = \left(\frac{\det u}{p}\right)$.

5- Groupe orthogonal, groupe unitaire : (E est ici un $\mathbb{C}$-ev ou $\mathbb{R}$-ev)

Déf : Soit f : produit scalaire ... sur E.

$O(f) = \{u \in GL(E),\ f(u(x),u(y)) = f(x,y)\ \forall x,y \in E\}$ est un sous-groupe de $GL(E)$, le groupe orthogonal (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou groupe unitaire ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$), plutôt noté $U(f)$.

$u \in O(f) \Leftrightarrow \forall x \in E, q(u(x)) = q(x)$.

où q est la forme quadratique associée à f (et on note $O(f)$ $O(q)$).

Le sous-groupe $O^+(f)$ de $O(f)$ constitué des éléments de déterminant 1 est appelé groupe spécial orthogonal.

Théorème : · Le centre de $O(q)$ est $\{-Id, +Id\}$.

· Si $n \geq 3$, le centre de $O^+(q)$ est $\{Id\}$ si n est impaire, $\{Id, -Id\}$ si n est pair.

Déf : $u \in O(q)$ est dite réflexion orthogonale si, dans une certaine base, sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$. u est dite renversement si, dans une certaine base, sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème : $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales ; si $n \geq 3$, $O^+(q)$ est engendré par les renversements.

Théorème : Dans une base orthonormée convenable, un élément de $O(q)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & A_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & A_r \end{pmatrix}$, où $A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$, $\theta_i \in]0, 2\pi[$, $\theta_i \neq \pi$.

II - ÉTUDE TOPOLOGIQUE.

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $GL_n(\mathbb{K})$ est muni de la topologie induite par la topologie d'espace métrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons d'abord que $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1- Densité

Prop : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Applications : · si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les polynômes caractéristiques de AB et BA coïncident.

· $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $d(\det)(X)(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X).H)$.

· il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

2- Connexité

Prop : · $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

· $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe : il a deux composantes connexes, $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, on a les homéomorphismes : $GL_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+^* \times SL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C})$, d'où :

Corollaire : $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Théorème : (Lie-Kolchin) Tout sous-groupe connexe et résoluble (i.e. tel qu'en certain $D^k(G) := \underbrace{D(D(\dots(D(G))\dots))}_{k \text{ fois}} = \{e\}$) de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un groupe constitué de matrices triangulaires supérieures.

3- Décomposition polaire

<u>Lemme</u> : $O_n(\mathbb{R})$ est un compact.

<u>Théorème</u> : Une matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme le produit d'une matrice orthogonale par une matrice symétrique définie positive. De plus, cette décomposition est un homéomorphisme.

<u>Application</u> : • L'enveloppe convexe de $O(n)$ est la boule unité euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• De plus, $O(n)$ est l'ensemble des points extrémaux de cette boule unité. DVPT

4- La fonction exponentielle

<u>Déf</u> : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est bien définie.

<u>Prop</u> : exp est une surjection continue (et même C^∞) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

<u>Application</u> : (Sous-groupes à un paramètre)
Un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ est de la forme $t \mapsto \exp(tX)$, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

III - REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

<u>Déf</u> : Une <u>représentation linéaire</u> d'un groupe G est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(E)$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

• Un sous-espace $F \subset \mathbb{C}^n$ est <u>G-invariant</u> si, pour tout $g \in G$, $\rho(g)(F) \subset F$. On dit alors que $\rho_{|F} : G \to GL(F)$ est une sous-représentation de ρ.

• Une représentation linéaire est dite <u>irréductible</u> si elle n'admet aucune sous-représentation non triviale.

<u>exemples</u> : • Représentation triviale ($\forall g \in G, \rho(g) = Id$).

• Représentation standard : si $|G| = n$, $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, on a $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^G$. $\{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$ est une base de $\mathbb{C}^G$. On définit $\rho(g)(e_{g_i}) = e_{gg_i}$.

<u>Théorème</u> (Burnside) : Toute représentation d'un groupe G d'exposant fini (i.e. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall g \in G, g^N = 1$) est d'image finie. DVPT

<u>Théorème</u> : Toute représentation continue d'un groupe compact est incluse dans un certain $U(q)$, q forme quadratique définie positive.

<u>Propriété</u> : si G est fini, Un sous-espace G invariant admet un supplémentaire G-invariant.

<u>Théorème</u> : Si $\rho : G \to GL(E)$ est une représentation, E se décompose en $\bigoplus_{i=1} F_i$, avec $\forall i, F_i$ G-invariant et $\rho_{|F_i}$ irréductible.

<u>Exemple</u> : les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1.

<u>Déf</u> : si $\rho : G \to GL(E)$ et $\mu : G \to GL(F)$ sont deux représentations, on dit qu'un morphisme $\varphi : E \to F$ est équivariant si :
$\forall g \in G, \forall e \in E, \varphi(\rho(g)e) = \mu(g)\varphi(e)$.

<u>Lemme</u> (Schur) : Si ρ et μ sont irréductibles, φ est soit nul, soit un isomorphisme. Dans ce dernier cas, on dit que les représentations sont équivalentes.

<u>Exemple</u> : à équivalence près, $\mathfrak{S}_3$ n'a que trois représentations irréductibles
- la triviale
- la signature $\rho(\sigma).x = \mathrm{sign}(\sigma)\,x$ } dimension 1
- la standard (donnée par l'action de permutation

Références principales :

Perrin pour la partie algébrique (trivialement).

Mneimné - Testard pour les résultats topologiques.

Fulton - Harris, "Représentation linéaire des groupes" pour la partie éponyme.

Mourbaqui pour le reste.