Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous groupes de $GL(E)$ - Applications

I Introduction

k corps commutatif - E un k-ev de dim finie n sur k.

- Le groupe linéaire $GL(E)$ est le groupe des k-automorphismes de E. La donnée d'une base de E définit un isomorphisme (non canonique) entre $GL(E)$ et $GL_n(k)$.
- L'application déterminant est un homomorphisme de $GL(E)$ dans k^*. Par définition son noyau $SL(E)$ est le groupe spécial linéaire.

prop: Caractérisation de $GL(E)$:

$u \in GL(E) \Leftrightarrow u$ est injectif $\Leftrightarrow u$ est surjectif $\Leftrightarrow \det u \neq 0$

prop : $1 \to SL(E) \to GL(E) \to k^* \to 1$ est une suite exacte scindée et donc $GL(E) \simeq SL(E) \rtimes k^*$

Exemples de sous-groupes de $GL(E)$: i) Exemples :

- Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$
- Le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$
- Le groupe des matrices diagonales inversibles, triangulaires supérieures inversibles, de permutation sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$.

ii) Résultats sur les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$

Théorème (Burnside) : Un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement si il est d'exposant fini. $\boxed{\text{DVP}}$

prop : Pour que $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ soient isomorphes (en tant que groupes) il faut et il suffit que $m = n$.

II Etude algébrique de $GL_n(k)$.

1) Générateurs

- matrice de transvection : $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ \left[\begin{matrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}\right] & i \end{array}$ $(i \neq j)$

$\left\{ \begin{matrix} (k, +) & \longrightarrow & (GL_n(k), \times) \\ \lambda & \longmapsto & T_{ij}(\lambda) \end{matrix} \right.$ est un morphisme de groupes et $T_{ij}^{-1}(\lambda) = T_{ij}(-\lambda)$

- matrice de dilatation : $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1) E_{ii} = \begin{array}{cc} & i \\ \left[\begin{matrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{matrix}\right] & i \end{array}$ $(\alpha \neq 0)$

$\left\{ \begin{matrix} (k^*, \times) & \longrightarrow & (GL_n(k), \times) \\ \alpha & \longmapsto & D_i(\alpha) \end{matrix} \right.$ est un morphisme de groupes et $D_i^{-1}(\alpha) = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Théorème :

- Les transvections engendrent $SL_n(k)$
- Les transvections et les dilatations engendrent $GL_n(k)$

Application : Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$

② Centre

prop : – Le centre Z de $GL_n(k)$ est le groupe des homothéties inversibles

– Le centre de $SL_n(k)$ est $Z \cap SL_n(k)$. Il est isomorphe à l'ensemble $\{\lambda \in k, \lambda^n = 1\}$

③ Sous groupe dérivé

Théorème : – Le groupe dérivé de $GL_n(k)$ est $SL_n(k)$ sauf pour $n=2$, $k=\mathbb{F}_2$, noté $D GL_n(k)$.

– Le groupe dérivé de $SL_n(k)$ est $SL_n(k)$ sauf pour $n=2$, $k=\mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, noté $D SL_n(k)$.

④ Groupe projectif linéaire

Déf° : Le quotient de $GL_n(k)$ par son centre est appelé le groupe projectif linéaire noté $PGL_n(k)$. De même on note $PSL_n(k)$ le quotient de $SL_n(k)$ par son centre et on parle du groupe projectif spécial linéaire.

Théorème : $PSL_n(k)$ est simple sauf dans les deux cas suivants : $n=2$, $k=\mathbb{F}_2$

$n=3$, $k=\mathbb{F}_3$

⑤ Corps finis et isomorphismes exceptionnels

prop : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

prop : On a les isomorphismes exceptionnels suivants :

- $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$
- $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$ • $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$

⑥ Action de groupes

1) $GL_n(k)$ agit transitivement sur les bases de k^n

$\rightsquigarrow$ Dans le cas réel : orientation

2) $GL_n(k)$ agit sur $M_n(k)$ par conjugaison, les orbites pour cette action sont caractérisées par les invariants de similitude

3) $GL_n(k)$ agit sur $M_n(k)$ par $P.M = {}^tPMP$

$\rightsquigarrow$ classification des formes quadratiques pour $k=\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q$

action de $GL(V)$ sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ $\hookrightarrow$ Molien

III Topologie de $GL_n(k)$, $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

. $M_n(k) \simeq k^{n^2}$ muni de la topologie produit et $GL_n(k)$ de la topologie induite

① propriétés

prop : $\det : M_n(k) \to k$ est continue

$\rightsquigarrow$ $GL_n(k)$ est ouvert dans $M_n(k)$.

prop : $\mathcal{O}(k)$ est un groupe topologique

② **Densité**

prop : $GL_n(k)$ est dense dans $M_n(k)$

Corollaire : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour $A, B \in M_n(k)$.

③ **Connexité et groupes classiques**

prop : • le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ où $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{ M \in GL_n(\mathbb{R}), \det M > 0 \}$

• $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe

• $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes

• $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$

④ **Décomposition polaire (cas réel)**

lemme : Toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme le produit OS d'une matrice orthogonale O par une matrice S symétrique définie positive.

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact on déduit :

Théorème (Décomposition polaire)

L'application : $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Rq Résultat analogue si $k = \mathbb{C}$.

Application : Il n'existe pas de sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant strictement $O_n(\mathbb{R})$.

Théorème : L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Corollaire : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Exemple : $GL_2(\mathbb{R}) \simeq O_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$

$GL_2^+(\mathbb{R}) \simeq SO_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \simeq \{ e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \} \times \mathbb{R}^3$

⑤ **Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$**

Théorème : Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors G est contenu dans un conjugué du groupe orthogonal

Rq Idem pour $\mathbb{C}$ avec le groupe unitaire $\boxed{\text{DVP}}$

Références : pour l'étude algébrique : Perrin - Oraux X-ENS Tome 1 et 2 - Nourdin - Serre - Document de Michel Coste sur les sous-groupes compacts - Rombaldi - Boyer