141 - Utilisation des groupes en géométrie

I Actions de groupes en géométrie

Les ensembles de transformations géométriques sont munis d'une structure de groupe, ce qui permet de les manipuler plus facilement.

1) Géométrie linéaire [TAU]

On se place dans un kev de dim n, k corps commutatif.

TR1 : . Les transvections engendrent le groupe $SL(E)$.
. Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

Prop2 : . Deux dilatations de E sont conjuguées dans $GL(E)$ ssi elles ont même rapport.
. Deux transvections de E sont conjuguées dans $GL(E)$.
Si $\dim E \geq 3$, deux transvections de E sont conjuguées dans $SL(E)$.

2) Géométrie affine, géométrie euclidienne [COT]

Déf 3 : On appelle espace affine un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe additif $(E,+)$ d'un ev agit à droite, transitivement et librement.

Rq Puisque l'action est transitive, $\forall (M,N) \in \mathcal{E}, \exists! \vec{x} \in E$ tq $N = M + \vec{x}$. On note $\vec{MN}$ ce vecteur $\vec{x}$.

Déf 4 : Soient E et E' 2 ev sur un même corps k et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ 2 espaces affines sur E et E' respectivement. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est dite affine s'il existe une applic. linéaire $u : E \to E'$ tq $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \vec{x} \in E$, $f(M + \vec{x}) = f(M) + u(\vec{x})$.

Prop 5 : La composée de 2 fonctions affines est une fonction affine. L'inverse d'une fonction affine est affine. [AUD]

Déf 6 : L'ensemble $GA(\mathcal{E})$ des automorphismes de $\mathcal{E}$ est le groupe affine de $\mathcal{E}$.

Les isométries [AUD]

Une isométrie est affine.

Prop 7 : $O(E)$ et $Isom(\mathcal{E})$, munis de la composition des applications, sont des groupes.

Ex : Les translations, les symétries orthogonales, et en particulier les réflexions, sont des isométries.

TR 8 : Soit E un espace euclidien (resp affine euclidien) de dim n. Toute isométrie vectorielle (resp affine) peut s'écrire comme composée de p réflexions avec $p \leq n$ (resp p réflexions avec $p \leq n+1$).

Déf 9 : Une isométrie vectorielle (resp affine) est un déplacement si son déterminant (resp celui de son application linéaire) est positif. Sinon, c'est un antidéplacement.

Rq : Tout déplacement est produit d'un nb pair de réflexions.

Déf 10 : L'ensemble des déplacements vectoriels (resp affine) est un sous-groupe de O (resp $Isom(\mathcal{E})$) noté SO (resp $Isom^+(\mathcal{E})$).

TR 11 : Soit G un sous-groupe fini de SO_3 d'ordre $n > 1$. Soit P l'ensemble des pôles des rotations différentes de l'identité de G. Alors en considérant l'action de G sur P, et en notant $e_x = |Stab(x)|$, $x \in P$, il n'y a que 5 possibilités

nb d'orbites	e_1	e_2	e_3	$\lvert G \rvert$
2	n	n	X	n
3	2	2	$n/2$	n
3	2	3	3	12
3	2	3	4	24
3	2	3	5	60

[B.R]

DVP

Prop 12 : Soit φ une isom. affine, il existe une isométrie ψ et une translation t_v de $\mathcal{E}$ tq
- l'espace $\mathcal{F}$ des points fixes de ψ est non vide
- le vecteur v de la translation est dans la direction F de ce sous-espace
- $\varphi = t_v \circ \psi$

De plus, (v, φ) est unique, t_v et ψ commutent et $F = \ker(\varphi - Id)$

Prop 13 : Soit f une isométrie vectorielle de E. E est somme directe orthogonale : $E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_r$ où V, W, P_i stables par f et $f|_V = Id_V$, $f|_W = -Id_W$, et où chaque P_i est un plan en restriction auquel f est une rotation.
En terme de matrices : $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

3) Géométrie semblable

On se place dans un espace affine de dim n.

Rq Une similitude est directe ou indirecte selon que son déterminant est positif ou négatif. [AUD]

Prop 14 : Soit S l'ensemble des similitudes. S est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$. [CON]

Prop 15 : Toute similitude est composée d'au plus $n+1$ réflexions affines et d'une homothétie.

Cas des similitudes planes : [AUD]
- Toute similitude vectorielle directe est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation vectorielle.
- Toute similitude vectorielle indirecte est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une réflexion

4) Géométrie projective [AUD]

Déf 16 : Une homographie $g : P(E) \to P(E')$ (E et E' ev) est une application tq il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ tq $p' \circ f = g \circ p$ (où p et p' sont des projections), i.e tq le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \xrightarrow{f} & E'\setminus\{0\} \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ P(E) & \xrightarrow{g} & P(E') \end{array}$$

soit commutatif.

Prop 17 : Les homographies forment un groupe noté $GP(E)$.

Rq On a un isomorphisme entre $GP(E)$ et $GL(E)/\{\text{homothéties}\}$.

Déf 18 : Soient a, b, c 3 points de $P^1(\mathbb{C})$ formant un repère projectif. Il existe une unique homographie h de $P^1(\mathbb{C})$ tq $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$, $h(c) = 1$. $\forall d \in P^1(\mathbb{C})$, on note $h(d) = [a, b, c, d]$, qu'on appelle le birapport de (a, b, c, d)

Prop 19 : Les homographies conservent le birapport.

Prop 20 : 4 points de $\mathbb{C}$ sont alignés ou cocycliques ssi leur birapport est réel.

Coro 21 : Toute homographie de $P^1(\mathbb{C})$ transforme un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$ en un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$.

Déf 22 : On appelle groupe circulaire le groupe engendré par les homographies et la symétrie $z \mapsto \bar{z}$.

Th 23 : Les éléments du groupe circulaire sont les transformations qui préservent l'ensemble des cercles et des droites.

II Construction à l'aide des groupes

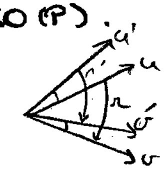
1) Les angles [AUD]

On se place dans le plan euclidien P.

Prop 24 : Étant donnés 2 vecteurs unitaires d'un plan vectoriel, il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre.

Déf 25 : On définit une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires par $(u, v) \mathcal{R} (u', v')$ ssi il existe une rotation f tq $\begin{cases} f(u) = u' \\ f(v) = v' \end{cases}$.
La classe d'équivalence de (u, v) est appelée angle orienté.
On appelle $\hat{A}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires et $A = \hat{A}/\mathcal{R}$ l'ensemble des angles orientés. On définit $\hat{\Phi} : \hat{A} \to SO(P)$.

Lemme 26 : Pour que les couples (u, u') et (v, v') aient la même image par Φ, il faut et il suffit qu'ils définissent le même angle orienté.



Conséquence : on peut définir $\Phi : A \to SO$ qui est bijective. On peut poser la loi de groupe sur A : $(u, v) + (u', v') := \Phi^{-1}(\Phi(u, v) \circ \Phi(u', v'))$.

Prop 27 (relation de Chasles) : $(u,v)+(v,w)=(u,w)$

Prop 28 : Les réflexions renversent les angles orientés

Conséquence : . Les isométries conservent les angles géométriques (angle géométrique : on confond (u,v) et (v,u)).
. SO conservent les angles orientés.

Rq : Les homographies conservent les angles orientés.

2) Les polyèdres [TAUGEO]

Déf 29 : Un polyèdre P convexe de $\mathcal{E}$ est une intersection de demi-espaces fermés de $\mathcal{E}$.

Déf 30 : On appelle drapeau de P toute suite $(F_0, F_1, \dots, F_{d-1})$ de faces de P où $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{d-1}$ et $\dim F_i = i$, $0 \leq i \leq d-1$, où d est la dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$.

Déf 31 : On appelle polyèdre régulier un polyèdre P convexe tq le groupe des isométries affines préservant P agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux de P.

III Un exemple d'utilisation des groupes dans les problèmes de classification : classification des coniques

Étant donné un groupe qui agit sur un ensemble, on cherche les orbites.

En géométrie affine. [TAUGEO]

Notons $P(\mathcal{E})$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathcal{E}$.
On pose $G = \mathbb{R}^* \times GA(\mathcal{E})$, que l'on munit de sa structure naturelle de groupe produit. On définit une action de G sur $P(\mathcal{E})$ en posant, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\Theta \in GA(\mathcal{E})$, $f \in P(\mathcal{E})$, $\Pi \in \mathcal{E}$:

$$[(\lambda,\Theta).f](\Pi) = \lambda f(\Theta^{-1}(\Pi)).$$

Déf 32 : On dit que $f, g \in P(\mathcal{E})$ sont affinement équivalents s'ils appartiennent à la même G-orbite.

Prop 33 : Le groupe G possède 9 orbites, correspondant aux équations :
X^2+Y^2+1, X^2+Y^2-1, X^2+Y^2, X^2-Y^2-1, X^2-Y^2, X^2-Y, X^2+1, X^2-1, X^2.

En géométrie projective : [LAD]

Il y a 5 orbites qui correspondent aux équations :
X^2+Y^2+1, X^2+Y^2-1, X^2+Y^2, X^2-Y^2 et X^2.

En géométrie euclidienne :

Il y a une infinité d'orbites.

IV "Petits" problèmes de géométrie

1) Polygone régulier du plan. [AUD]

Déf 34 : On dit qu'un polygone convexe plan est régulier si tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

Quelles sont les isométries conservant un polygone régulier? [PER]

Th 35 : Si P_n est un polygone régulier à n sommets, on a :
- $Is^+(P_n) = \{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par la rotation r.
- $Is^-(P_n)$: il y a exactement n réflexions laissant P_n globalement invariant, ce sont les réflexions d'axes les droites (OA_k) ou les médiatrices Δ_k des arêtes $[A_k A_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n)$ $(P_n = A_0 \dots A_{n-1})$

Déf 36 : Le groupe diédral D_n est le sous-groupe de $Isom(\mathbb{R}^2)$ laissant invariant le polygone régulier à n côtés.

2) Quelles sont les transformations qui préservent un polyèdre régulier? [PER]

Th 37 : Il y a 5 types de polyèdres réguliers : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, isocaèdre. cf annexe

Th 38 : Le groupe des isométries du tétraèdre est isomorphe à A_4, celui du cube et de l'octaèdre est isomorphe à S_4 et celui du dodécaèdre et de l'icosaèdre est isomorphe à A_5. $\boxed{\text{DVP} = \text{groupe du cube}}$

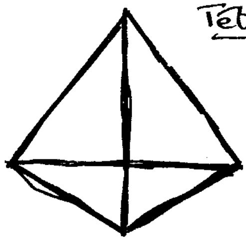
Th 39 : Les sous-groupes de SO_3 sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, le groupe du tétraèdre A_4, le groupe du cube S_4, le groupe du dodécaèdre A_5.

3) De combien de façons différentes peut-on paver le plan? [BER]

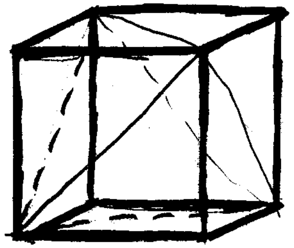
Déf 40 : Soit E un plan euclidien, P un compact convexe de E d'intérieur non vide et G un sous-groupe de $Is^+(E)$. G est alors appelé groupe de pavage s'il vérifie les axiomes : $\bigcup_{g \in G} g(P) = E$ et $\mathring{g(P)} \cap \mathring{h(P)} \neq \emptyset \Rightarrow g(P) = h(P)$

Thm : À conjugaison près dans $GL(E)$, il n'existe que 5 tels groupes ce sont ceux correspondant aux 5 figures de l'annexe.

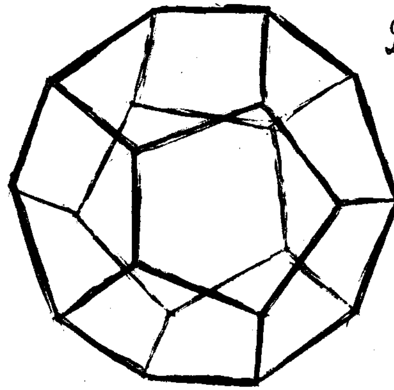
Les 5 types de polyèdres réguliers



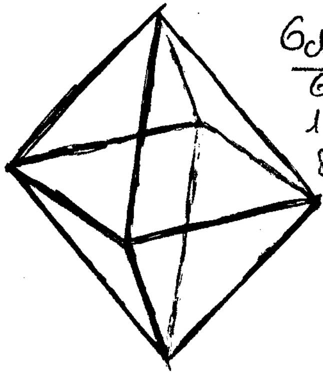
Tétraèdre régulier
4 sommets
6 arêtes
4 faces triangulaires



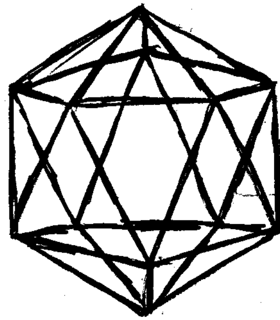
Cube
8 sommets
12 arêtes
6 faces carrées



Dodécaèdre régulier
20 sommets
30 arêtes
12 faces pentagonales

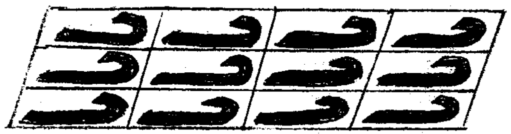


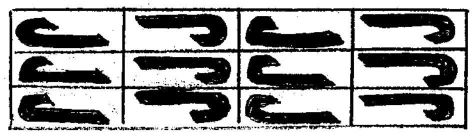
Octaèdre régulier
6 sommets
12 arêtes
8 faces triangulaires

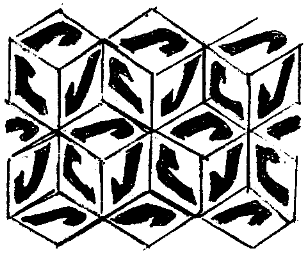


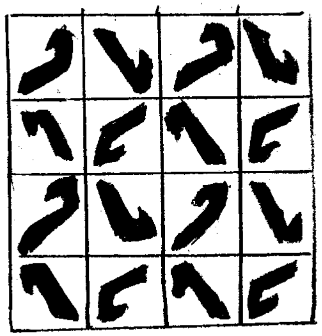
Icosaèdre régulier
12 sommets
30 arêtes
20 faces triangulaires

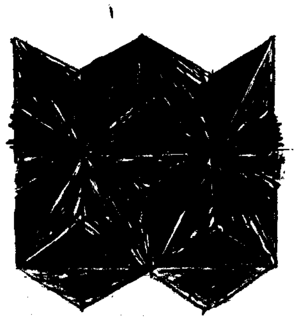
Les 5 groupes de pavage











Références

[TAU] Tauvel, Mathématiques générales pour l'agrégation

[TAUgéo] Tauvel géométrie

[AUD] Audin, Géométrie

[B-R] Bouvier - Richard

[COM] Combes, Algèbre et géométrie

[LAD] Ladegaillerie, Géométrie

[MER] Mercier, Cours de géométrie

[BER] Berger, Géométrie 1

Pas mal
Goblot, thèmes de géométrie
Alessandri

Arnaudiès
sur les polyèdres pour le dvp cube.