Utilisation des groupes en géométrie

Dans cette leçon nous essayons de dégager les liens entre groupes et géométrie ; puis nous les exploitons pour résoudre quelques problèmes simples.

I La notion d'invariant

Idée : on se donne un ensemble X.

groupe G agissant sur X → propriétés des $x \in X$ invariantes par G

propriété portant sur les $x \in X$ → sous-ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}(X)$ préservant la propriété : souvent un sous-groupe.

Quelques exemples simples :

ensemble	invariant(s)	groupe
E, ev de dimension finie	bases	GL(E)
	déterminant de familles	SL(E)
E, $\mathbb{R}$-ev euclidien	produit scalaire, b.o.n...	O(E)
	b.o.n.d.	SO(E)
(E,q) esp. quad.	la forme quadratique	O(q)
$\mathcal{E}$, esp. aff. de dim < ∞ sur $\mathbb{R}$ et de dim ≥ 2	alignement	GA($\mathcal{E}$)
	angles	sim($\mathcal{E}$)
E, esp. proj. sur $\mathbb{R}$ de dim ≥ 2	alignement	PGL(E)

Rq : certaines lignes sont des définitions ; les sixièmes et huitièmes sont les théorèmes fondamentaux des géométries affine et projective.

Voici des notions plus subtiles.

* le birapport : soient k un corps commutatif et $\mathcal{D}$ une droite projective sur k. Si $(a,b,c,d) \in \mathcal{D}^4$ et si a, b et c sont distincts, il existe une unique homographie $h : \mathcal{D} \to \mathbb{P}^1(k)$ envoyant (a,b,c) sur $(\infty, 0, 1)$. On pose

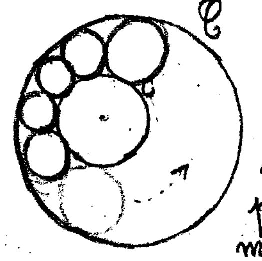
$$[a,b,c,d] = h(d).$$

Prop : soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites projectives, et (a,b,c,d) ; (a',b',c',d') dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ resp. les trois premiers de chaque quadruplet étant distincts. Il existe une homographie $g : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ envoyant un quadruplet sur l'autre $\Leftrightarrow$ les birapports sont égaux.

Prop : quatre points sont alignés ou cocycliques dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ $\Leftrightarrow$ leur birapport est réel.

Co : les homographies préservent les droites ou cercles (mais l'image d'une droite peut être un cercle ou vice-versa).

Application à l'alternative de Steiner.



$\mathcal{C}$

On fixe $\mathcal{C}$ et C et on construit une suite de cercles bitangents. Le caractère périodique de cette suite (et sa période) ne dépend pas du premier cercle bitangent choisi, mais seulement de $\mathcal{C}$ et C.

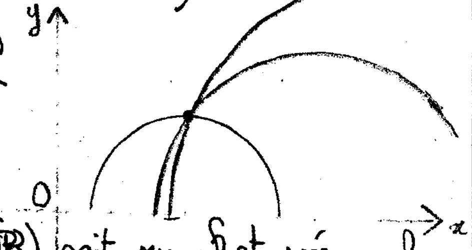
* Géométrie hyperbolique plane : on appelle demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im} z > 0\}$. On décrète qu'une droite de $\mathcal{H}$ est

(i) l'intersection de $\mathcal{H}$ avec une droite verticale ;

(ii) ou un demi-cercle centré sur l'axe des abscisses.

Prop : par deux points de $\mathcal{H}$ passe une unique droite. Par un point donné passent une infinité de parallèles à une droite donnée. (parallèles = non-sécantes)

(trois parallèles à (Oy) passant par le même point...)



Prop : $PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{H}$ et préserve les droites hyperboliques.

Si $a, b \in \mathcal{H}$ soient $u, v \in (Ox) \cup \{\infty\}$ les "extrémités" de (ab). Il existe une unique $h \in PSL_2(\mathbb{R})$ tq $h(u) = 0$, $h(v) = \infty$; on a alors $h(a) = i\alpha$; $h(b) = i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$; $\alpha < \beta$) et on pose $d(a,b) = \ln \beta/\alpha$.

Th : d est une distance sur $\mathcal{H}$.

* Géométrie conforme : une application bijective $U \subseteq \mathbb{C} \to V \subseteq \mathbb{C}$ est dite conforme si elle préserve les angles (orientés) d'intersection de courbes. Supposons U, V ouverts connexes.

Prop : les bijections conformes sont exactement les biholomorphismes.

Si U, V sont simplement connexes et distincts de $\mathbb{C}$, on peut supposer $U = V = \mathbb{D}$ quitte à composer au départ et à l'arrivée par un biholomorphisme (théorème de Riemann).

Prop: les biholomorphismes du disque sont les $z \mapsto \lambda \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ où $|\lambda|=1$ et $a \in \mathbb{D}$.

II Problèmes de classification

Etant donné un groupe qui agit sur un ensemble, on cherche les orbites.

Exemple simple: classification des triangles.

En géométrie semblable, les orbites sont paramétrées par des couples (x,y) de réels positifs strictements, avec $x+y<\pi$ et $x\leq y$. (Ce sont deux des trois angles).

En géométrie affine il n'y a qu'une seule orbite.

* Classification affine des coniques de $\mathbb{R}^2$.

Prop: il y a neuf orbites, correspondant aux équations: X^2+Y^2+1, X^2+Y^2-1, X^2+Y^2, X^2-Y^2-1, X^2-Y^2, X^2-Y, X^2+1, X^2-1, X^2.

Remarque: dans la classification projective, il n'y aurait que cinq orbites.

* Classification euclidienne des coniques de $\mathbb{R}^2$.

Il y a une infinité d'orbites. Si on ne regarde que les coniques irréductibles, on peut les grouper en quatre familles paramétrées par $a,b,p>0$:

(i) ellipses imaginaires $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+1=0$;

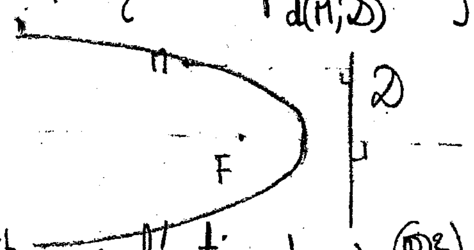
(ii) ellipses $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0$;

(iii) hyperboles $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0$;

(iv) paraboles $x^2-2py=0$.

* Classification des coniques de $\mathbb{R}^2$ en géométrie semblable: on utilise la définition par foyer et directrice. Soient $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ une droite et $F \notin \mathcal{D}$. Soit $e>0$ (l'excentricité). La conique associée est

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{MF}{d(M,\mathcal{D})} = e \right\}.$$



les orbites sous l'action de $\mathrm{sim}(\mathbb{R}^2)$ sont paramétrées par l'excentricité. On obtient

(i) pour les $e<1$ des ellipses

(ii) pour $e=1$ la parabole

(iii) pour $e>1$ des hyperboles.

III Symétries

On étudie maintenant quelques objets possédant des symétries, c'est-à-dire invariants sous l'action de certains groupes.

* Polyèdres réguliers

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension $d \geq 2$ finie. Un polyèdre convexe est une intersection de demi-espaces fermés, finie. Un polytope est un polyèdre convexe compact épais.

Soit $P = R_1 \cap \dots \cap R_n$ un polytope, avec $\forall i$

$P \neq R_1 \cap \dots \cap R_{i-1} \cap R_{i+1} \cap \dots \cap R_n$.

Soit $H_i = \mathrm{fr}(R_i)$ (hyperplan affine).

Prop: $P \cap H_i$ est un polytope de H_i; on dit que c'est une $(d-1)$-face de P. Par récurrence on définit les k-faces $(0 \leq k \leq d-1)$.

Déf: un drapeau de P est une suite de face $(F_0, \dots, F_{d-1})$ tq $\forall i<d-1$, F_i est une i-face de F_{i+1}.

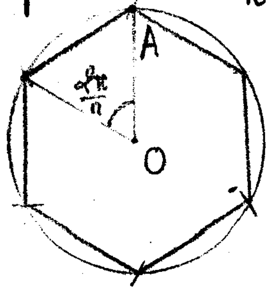
On a une action de $\mathrm{isom}_P(\mathcal{E})$ (les isométries stabilisant P) sur $\mathcal{D}_P$ l'ensemble des drapeaux de P (qui est fini).

Déf: P est régulier si cette action est transitive. Elle est alors simplement transitive.

Le groupe $\mathrm{isom}_P(\mathcal{E})$ est fini. Il détermine P à une similitude près. Si on vectorialise en l'isobarycentre des sommets (les 0-faces) de P, on voit $\mathrm{isom}_P(\mathcal{E})$ comme un sous-groupe de $O(\vec{\mathcal{E}})$, fini.

Précisons un peu en dimensions 2 et 3.

Prop: dans $\mathbb{R}^2$, pour $n \geqslant 3$ il y a un unique polytope régulier à n 2-faces. Son groupe d'isométries est d'ordre $2n$, c'est le groupe diédral $\mathbb{D}_n$.



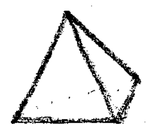
σ_{OA} : symétrie d'axe (OA)

$r_{O,\frac{2\pi}{n}}$: rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$

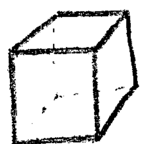
A : sommet quelconque

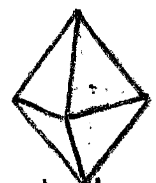
$$\mathbb{D}_n = \langle \sigma_{OA}, r_{O,\frac{2\pi}{n}} \rangle \simeq \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

Prop: dans $\mathbb{R}^3$, à similitude près, il existe cinq polytopes réguliers.

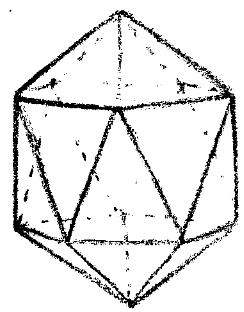


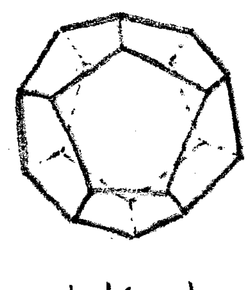
Tétraèdre, autodual, $\mathfrak{S}_4$.





Cube et octaèdre, duaux réciproques, $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.





Icosaèdre et dodécaèdre, duaux réciproques, $\mathfrak{S}_5$.

* Frises

Soit $\mathcal{P}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Déf: une frise est une partie $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de $\mathcal{P}$ telle que $\mathrm{isom}_{\mathcal{F}}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z}_1$ (où $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ est le groupe des translations). Un groupe de frises est un sous-groupe G de $\mathrm{isom}(\mathcal{P})$ tel que $G \cap \mathcal{T}(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z}_1$.

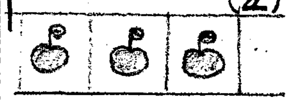
Deux sous-groupes de $\mathrm{isom}(\mathcal{P})$ sont dits équivalents s'ils sont conjugués par une similitude.

Prop: il y a exactement deux groupes de frises constitués de déplacements, ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Rem: à toute frise correspond un groupe de frises ; et à tout groupe de frises on peut associer une (en fait une infinité) de frises.

Voici des frises pour les deux groupes précédents:

$(\mathbb{Z})$

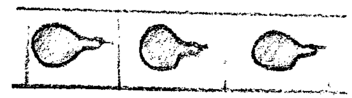


$(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

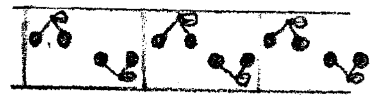
Prop: soit G un groupe de frises tel que $G \cap \mathrm{isom}^+(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z}$. Alors G est équivalent à un groupe de frises isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}$ (et il y a exactement trois classes d'équivalence correspondantes).

Voici des frises représentant ces groupes.

$\left(\mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)$;



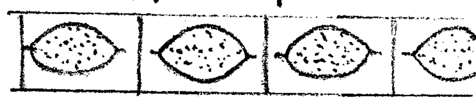
$\left(\mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)$;



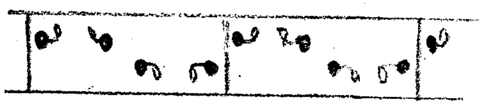
$(\mathbb{Z})$.

Prop: soit G un groupe de frises tel que $G \cap \mathrm{isom}^+(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors G est équivalent à un groupe de frises isomorphe à $\left(\mathbb{Z} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ou $\mathbb{Z} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$; et il y a exactement deux classes d'équivalence correspondantes.

Voici des frises représentant ces groupes



$\left(\mathbb{Z} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$



$\left(\mathbb{Z} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)$.

En tout il y a donc 7 groupes de frises deux à deux non-équivalents.

Rem: on peut ensuite s'intéresser aux pavages ; mais cela devient fastidieux (il y a 17 classes...)

Bibliographie

BERGER, TAUVEL, AUDIN $\}$ géométrie

SAMUEL géométrie projective

ARNAUDIÈS polyèdres de $\mathbb{R}^3$

RUDIN analyse réelle et complexe

RATCLIFFE introduction to hyperbolic manifolds

CARATHEODORY conformal representation

ARTIN (M.) algebra

BEKKA (Bachir) cours de groupes classiques