148 FORMES QUADRATIQUES REELLES. EX ET APPLI

Cadre : E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I) Généralités

1) Forme quadratique réelle

Déf 1 : Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est appelée forme quadratique réelle s'il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x,x) = q(x)$.
Dans ce cas, φ est donnée par $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$ et φ est appelée forme polaire de q.

Rmq : Etant donnée une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, une forme quadratique sur E est un polynôme homogène de degré 2.

Th 1 : L'application qui à toute forme quadratique sur E associe sa forme polaire est un isomorphisme entre l'e.v. des formes quadratiques sur E et celui des formes bilinéaires symétriques sur E.

Exemple 1 : $M \mapsto tr({}^tMM)$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$.

2) Expression matricielle

Déf 2 : On appelle matrice de q dans la base $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $\left(\varphi(e_i,e_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$. C'est une matrice symétrique.

Th 2 : L'application $\varphi \mapsto Mat_B(\varphi)$ est un isomorphisme de l'ev des formes bilinéaires symétriques sur E vers celui des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2 : . la matrice hessienne d'une application de classe $\mathcal{C}^2$ est la matrice d'une forme quadratique.
. la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par $q(x_1,\dots,x_n) = \int_0^1 (x_1 + t x_2 + \dots + t^{n-1}x_n)^2\,dt$ a pour matrice H avec $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$.

3) Changement de base, rang, noyau

Prop 1 : calcul dans une base, changement de base
. Soient X et $Y \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs colonnes des coordonnées de x et $y \in E$ dans la base B. Soit $M = Mat_B(\varphi)$. Alors $\begin{cases} \varphi(x,y) = {}^tXMY \\ q(x) = {}^tXMX \end{cases}$
. Soit B' une autre base de E et P la matrice de passage de B à B', alors $Mat_{B'}(\varphi) = {}^tP\, Mat_B(\varphi) P$.

Conséquence : . On appelle rang de q le rang de la matrice $Mat_B(\varphi)$.
. On appelle noyau de q le noyau de la matrice $Mat_B(\varphi)$.

Déf 3 : On dit que la forme quadratique q est non dégénérée si $\operatorname{Ker} q = \{0\}$.

Rmq : si q est non dégénérée, l'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \varphi(x,\cdot) \end{array}$ est un isomorphisme de E sur E^*.

Application : Soit une quadratique affine sur un e.v. affine $\mathcal{E}$, d'équation $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{E} \ / \ q(\vec{OM}) + L(\vec{OM}) + c = 0 \}$ où q est une forme quadratique, L une forme linéaire. Alors $\mathcal{C}$ est à centre s'il existe un unique point $\Omega \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{C}$ a pour équation $q(\vec{O\Omega}) = c'$.

On a : $\mathcal{C}$ est à centre $\Leftrightarrow$ q est non dégénérée.

4) Formes quadratiques positives

Déf 4 : Une forme quadratique q sur E est positive si on a $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, définie positive si on a $q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

$\boxed{\text{Prop 2 : Pour } q \text{ positive}, \ \forall x, y \in E, \ |\varphi(x,y)|^2 \leq q(x)q(y)}$

Conséquence : si q est définie positive, $x \mapsto \sqrt{q(x)}$ définit une norme sur E.

Exemple 3 : Soit V un espace euclidien de dimension 2 et soit E l'ensemble des endomorphismes symétriques de V dont la trace est nulle.
Alors, $\forall x \in E$, $q(x) = -\det(x)$ est une forme quadratique définie > 0.
Application : John - Loewner.

II) Orthogonalité

1) Définitions

Déf 5 : On appelle cône isotrope de q l'ensemble $C_q = \{ x \in E : q(x) = 0 \}$

Rmq :
- $C_q \subset \operatorname{Ker} q$
- Si q est positive $C_q = \operatorname{Ker} q$.
- Si q est positive, alors q définie $\Leftrightarrow$ q non dégénérée.

Déf 6 : Si $A \subset E$ on appelle orthogonal de A selon q l'ensemble
$A^{\perp} = \{ y \in E : \forall x \in A, \ \varphi(x,y) = 0 \}$.

Rmq : $\operatorname{Ker} q = E^{\perp}$.

$\boxed{\text{Prop 3 : Si } F \cap F^{\perp} = \{0\}, \text{ alors on a } E = F \oplus F^{\perp}}$

Application : Caractérisation de Sylvester des matrices symétriques définies positives.
Soit M une matrice symétrique réelle, alors M est définie positive ssi tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

2) Bases q-orthogonales

Déf 7 : Une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E est dite q-orthogonale si :
$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$ ie $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

$\boxed{\text{Th 3 : Il existe des bases q-orthogonales}}$

Rmq :
- $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base q-orthogonale ssi q s'écrit comme combinaison linéaire $(e_i^*)^2$.
- La méthode de Gauss est un moyen pratique pour décomposer une forme quadratique en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

3) Classification des formes quadratiques réelles

Déf 8 : On appelle signature de q le couple (r, s) où r (respectivement s) est la dimension maximale d'un sev de E sur lequel q est définie positive (respectivement définie négative).

Th 4 : Sylvester

Soit $B=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base q-orthogonale, alors $r = \mathrm{Card}\{i : q(e_i)>0\}$
$s = \mathrm{Card}\{i : q(e_i)<0\}$

et $r+s$ est le rang de q.

Application : Comptage de racines

Déf 9 : 2 formes quadratiques q et q' sont équivalentes sur E s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q' = q\circ u$ (ie q et q' ont même équation dans 2 bases différentes).

Corollaire 1 : Classification algébrique des formes quadratiques réelles

q et q' sont équivalentes si elles ont même signature. Un représentant de cette classe est la forme quadratique :

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_1^2+\dots+x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$$

Application : Classification topologique des formes quadratiques non dégénérées

On note $Q(E)$ le $\mathbb{R}$-ev des formes quadratiques et $\Omega(E)$ le sous-ensemble de $Q(E)$ constitués des formes quadratiques non dégénérées. Alors $\Omega(E)$ est un ouvert de $Q(E)$ admettant $(n+1)$ composantes connexes $\Omega_q(E)$, $q=0\dots n$ où $\Omega_q(E)$ est l'ensemble des formes quadratiques de signature $(q, n-q)$.

III) Orthogonalisation simultanée et applications

Th 5 : Soit q une forme quadratique définie positive et soit q' une forme quadratique. Alors il existe une base orthonormée pour q qui est orthogonale pour q'.

De manière équivalente : soit M la matrice symétrique déf >0 associée à q et N une matrice symétrique. Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $P^tMP = I_n$ et P^tNP est diagonale

Applications :

1) Th de John : tout compact K de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

2) Classification des coniques : Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien de direction E. Si $\mathcal{C}$ est une conique propre d'image non vide, il existe un repère orthonormée dans lequel une équation de $\mathcal{C}$ a une et une seule des formes :
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $y^2=2px$.

3) Soit A une matrice symétrique positive, alors $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (inégalité d'Hadamard)

· Soient $x_1,\dots,x_n$ n vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$, alors quelle que soit la bon de $\mathbb{R}^n$, on a $|\det_B(x_1,\dots,x_n)| \leq \|x_1\|\dots\|x_n\|$.

4) Soit E un espace euclidien et un endomorphisme symétrique u où le produit scalaire est noté $(\cdot,\cdot)$. Soit q la forme quadratique définie par $q(x)=(u(x),x)$. Alors $\mathrm{tr}(u)=0 \Leftrightarrow \exists$ une bon de $(E,(\cdot,\cdot))$ formée de vecteurs isotropes pour q. (Application : lieu orthoptique des coniques)

IV) Formes quadratiques et calcul différentiel

Prop 4 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a\in U$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application 2 fois différentiables en a. Si $df(a)=0$, alors :

· si a est un minimum local de f, la forme quadratique $d^2f(a)$ est positive

· si $d^2f(a)$ est définie positive, a est un minimum local strict.

Lemme de Morse : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit $f : U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $Df(0)=0$ et $D^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ entre 2 voisinages de 0 tq $\varphi(0)=0$ et $f(x)-f(0) = \varphi_1^2(x)+\dots+\varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \dots$

Références : . Gourdon Algèbre (Chap V)
. Grifone Algèbre linéaire
. Francinou, Gianella Oraux X-Ens Algèbre 3
. Audin (applications sur les coniques)

Développements : * Classification topologique des formes quadratiques non dégénérées.

* L'application 4) du Théorème 5 :
"Isotropie et géométrie dans un espace euclidien"

Autres développements possibles :

cf. l'autre leçon sur les formes quadratiques
* Théorème de John
* Comptage de racines et signature de formes quadratiques

* Lemme de Morse