132 : Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications

K un corps et E un K-e.v. de dimension finie n.

1. Dualité et hyperplans :

1.1 : Formes linéaires et hyperplans :

Déf 1.1 : On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K. L'ensemble E^* de ces application est appelé dual algébrique de E. C'est un K-e.v. pour l'addition des applications et la multiplication scalaire.

Ex : Dans $E = \mathcal{M}_n(K)$, si $A \in E$ est donnée, $[X \mapsto Tr({}^tAX)] \in E^*$

Déf 1.2 : Un hyperplan de E est un s.e.v. de dimension $n-1$.

Prop 1.1 : (i) Si $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, alors $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E.
(ii) Si H est un hyperplan de E, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$
De plus : $\forall \psi \in E^*$, $\ker\psi = H \Leftrightarrow \exists \lambda \in K\setminus\{0\}$; $\psi = \lambda\varphi$

Application : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.

Corollaire 1.2 : [Équation d'un hyperplan]
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ non tous nuls
(i) L'ensemble des $x \in E$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ vérifient :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \qquad (*)$$
est un hyperplan de E.
(ii) Réciproquement tout hyperplan de E admet dans $\mathcal{B}$ une équation de la forme $(*)$, unique à multiplication près par une constante $\neq 0$

1.2 : Espace Dual :

Déf 1.3 : Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Pour $i = 1..n$, l'élément de E^* défini par :
$\forall j = 1..n$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$,
est appelé i-ème forme linéaire coordonnée dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$

Prop 1.3 : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, la famille $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ est la base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$.
On dit que $\mathcal{B}$ est la base antéduale de $\mathcal{B}^*$

Ex : Dans $E = K_n[X]$, la base duale de la base $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ est la base $(\varphi_k)_{0\leq k\leq n}$ où :
$\forall k = 0..n$, $\forall P \in K_n[X]$, $\varphi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

Corollaire 1.4 : E^* est isomorphe à E

Rem : Si K est de caractéristique $\neq 2$ et si on dispose sur E d'une forme quadratique q non dégénérée de forme polaire φ. Alors l'application $x \in E \mapsto \varphi(x, \cdot)$ réalise un isomorphisme de E sur E^*.
C'est en particulier le cas lorsque E est muni d'une structure euclidienne.

Ex : $\Theta : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)^*$
$A \longmapsto [X \mapsto Tr({}^tAX)]$ est un isomorphisme

Déf 1.4 : On appelle bidual de E le dual de E^*. On le note E^{**}.

Thm 1.5 : $J : E \longrightarrow E^{**}$
$x \longmapsto [\varphi \mapsto \varphi(x)]$ est un isomorphisme

Prop 1.6 : Toute base de E^* admet une unique base antéduale.

2. Orthogonalité, transposition :

2.1 : Orthogonalité

Def 2.1 : Soient $A \subset E$ et $B \subset E^*$, on définit l'orthogonal de A dans E^* et l'orthogonal de B dans E par :
$A^\perp = \{\varphi \in E^* ;\ \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$ et $B^\perp = \{x \in E ;\ \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}$

Prop 2.1 : $A_1 \subset A_2 \subset E \Rightarrow A_2^\perp \subset A_1^\perp$; $A \subset E \Rightarrow A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$
$B_1 \subset B_2 \subset E^* \Rightarrow B_2^\perp \subset B_1^\perp$; $B \subset E^* \Rightarrow B^\perp = \text{Vect}(B)^\perp$

Thm 2.2 : (i) Si F est un s.e.v. de E, $\dim F + \dim F^\perp = n$ et $(F^\perp)^\perp = F$
(ii) Si G est un sev de E^*, $\dim G + \dim G^\perp = n$ et $(G^\perp)^\perp = G$

Coro 2.3 : * Soit $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de E^* de rang r, alors $\bigcap_{i=1}^{r} \text{Ker}\varphi_i$ est un sev de E de dimension $n-r$.
* Réciproquement, si F est un sev de E de dimension q, alors il existe $n-q$ hyperplans $H_i = \text{Ker}\varphi_i$ tels que $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n-q}$ est libre et que $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} H_i$.

2.2 : Applications à l'interpolation

* Interpolation de Lagrange : $E = K_n[X]$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ distincts.
$(\varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est définie dans E^* par : $\forall i = 0..n$, $\forall P \in E$, $\varphi_i(P) = P(a_i)$.
$(\varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de E^* dont la base antéduale est formée des polynômes de Lagrange $L_i = \prod_{i \neq j} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$, $0 \leq i \leq n$.
Pour $P \in E$, on a donc $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$ (Formule d'interpolation de Lagrange)

* Méthode de Quadrature de Gauss : I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+^*)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n w(x)dx < +\infty$.
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_I P(x)Q(x)w(x)dx$.
On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille de polynômes unitaires orthogonaux pour $\langle , \rangle$.
Les P_n sont alors scindés à racines simples dans $\mathring{I}$ et si, pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, on note $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ les racines de P_n, on a alors

$\exists ! (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n ;\ \forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_I P(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$

2.3 : Application transposée :

Soient E, F deux K-ev de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Def 2.2 : On appelle transposée de u l'élément ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ défini par :
$\forall \varphi \in F^*$, ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$

Prop 2.4 : • $\text{Im}({}^t u) = (\text{Ker } u)^\perp$; $\text{Ker}({}^t u) = (\text{Im}(u))^\perp$
• Si G est un K-ev de dimension finie et si $v \in \mathcal{L}(F,G)$: ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

Prop 2.5 : Un sev F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$

Cas euclidien : Application à la réduction des endomorphismes symétriques

Coro 2.6 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si F est un sev de E u-cyclique ie : $\exists x \in F ;\ F = \{P(u)(x) ;\ P \in K[X]\}$
Alors F possède un supplémentaire stable par u. **Poly. minimale de $u_{|F}$ = poly minimale de u.**

Application : Invariants de similitude d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

Prop 2.7 : Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F, alors
$$\text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t\left[\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)\right]$$

Application : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Coro 2.8 : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{C}^*$ dans E^*, alors :
$$Q = {}^t P^{-1}$$

3. Convexité et Hyperplans :

Ici, E est supposé euclidien

3.1 : Théorèmes de séparation de Hahn-Banach et applications :

Déf 3.1 : Soient $f \in E^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et A, B deux parties de E.
On considère l'hyperplan affine $H_\alpha = \{x \in E ;\ f(x) = \alpha\}$.
On dit que H_α sépare A et B :
- Au sens large si $\sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$
- Au sens strict si $\sup_{a \in A} f(a) < \alpha < \inf_{b \in B} f(b)$

Thm 3.1 [Séparation de Hahn-Banach]
Soient A et B deux convexes, non-vides, disjoints dans E.
1) Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan qui sépare A et B au sens large.
2) Si A est fermé et B est compact, il existe un hyperplan qui sépare A et B au sens strict.

Coro 3.2 : Soient A et B deux convexes fermés de E, disjoints et non vides. Alors on peut séparer A et B au sens large

Coro 3.3 : Soit C un convexe fermé non-vide et distinct de E. Alors C est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Thm 3.4 : [Farkas-Minkowski] Soient $a_1, \dots, a_k \in E$. On note
$$K = \{x \in E ;\ \forall i = 1..k,\ (a_i, x) \geq 0\}$$
Si $p \in E$ vérifie : $\forall x \in K, (p, x) \geq 0$. Alors :
$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+ ;\ p = + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$

3.2 Hyperplans d'appui et points extrémaux :

Déf 3.2 : Soit C un convexe de E et H un hyperplan affine de E.
H est un hyperplan d'appui à C si il existe $x_0 \in \partial C$ tel que H sépare C et $\{x_0\}$.
Si $x_0 \in H \cap \partial C$, on dit que H est un hyperplan d'appui à C en x_0

Prop 3.5 : Soit C convexe non vide de E, $C \neq E$. Alors, pour tout $x \in \partial C$ il existe un hyperplan d'appui en x à C.

Déf 3.3 : Soit C un convexe de E. Un point $x \in C$ est dit extrémal si $C \setminus \{x\}$ est convexe.

Thm 3.6 [Minkowski] Un convexe compact de E est l'enveloppe de ses points extrémaux

Conséquence : Tout convexe fermé borné admet un point extremal

Développements :
* Démonstration du Corollaire 2.6.
* Théorème de séparation stricte de Hahn-Banach (point 1. du Thm 3.1) et corollaire 3.2.
* Lemme de Farkas-Minkowski (Théorème 3.4)

Références :

* Parties 1 et 2 :

- GOURDON. "Les Maths en tête, Algèbre", Chap. III. 4
- ARNAUDIES, FRAYSSE : "Cours de Mathématiques, tome 1 : Algèbre" Chap XII

↳ Sur la méthode de Gauss pour les intégrales :

- DEMAILLY. "Analyse numérique et équations différentielles" Chap III 3.
- FRANCINOU, GIANELLA, NICOLAS "Oraux X-ENS, Analyse 1"

* Partie 3 :

- HIRIART-URRUTY, LEMARÉCHAL : "Convex Analysis and Minimization Algorithms I" (p 121 -> 132)