118 Exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.

I) Dimension et réduction des endomorphismes [GOB-GOUR]

Cadre : E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, F $\mathbb{K}$-ev de dim finie p.

1°/ Rappels et 1ères propriétés

Déf/Prop : Deux sev P, Q de E sont dits supplémentaires

ssi $P \cap Q = \{0\}$ et $P + Q = E$

De manière équivalente,

ssi $P \cap Q = \{0\}$ et $\dim P + \dim Q = \dim E$

ssi $P + Q = E$ et $\dim P + \dim Q = \dim E$

ex : Soit $p : E \to E$ un projecteur, alors $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$

Déf : Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Le rang de u est $rg(\varphi) = \dim(\operatorname{Im} \varphi)$

ex : Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle, $rg\, \varphi = 1$

Formule du rang : de l'isomorphisme $E/\operatorname{Ker} u \simeq \operatorname{Im} u$

on déduit : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + rg\, u$

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a

EQU : i) u est injective

ii) u est surjective

iii) u est bijective

ex : - interpolation de Lagrange : $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$ pour a_i 2 à 2 distincts est un isomorphisme.

- notons $E^* = \{ \varphi : E \to \mathbb{K} \text{ linéaire} \}$, on a :

$i : E \to E^{**}$, $x \mapsto (E^* \to \mathbb{K},\ \varphi \mapsto \varphi(x))$ est un isomorphisme.

2°/ Démonstrations par récurrence sur la dimension

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

u est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$

Th : Soient $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables qui commutent 2 à 2, alors il existe une base commune de diagonalisation

Th : Soient $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables qui commutent 2 à 2, alors il existe une base commune de trigonalisation

3°/ Réduction de Jordan

// DEV

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente

alors il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $J \in M_n(\mathbb{C})$ tq

$A = P J P^{-1}$

avec $J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$ où $J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

$J_i \in M_{d_i}(\mathbb{C})$, $1 \le i \le$

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Alors la suite des sous-espaces $(\operatorname{Ker} A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante, stationnaire à partir d'un certain rg (strict^t croissante avant)

Prop : On a les relat° pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente

$\dim \operatorname{Ker} A = \#$ blocs de Jordan

$\dim \operatorname{Ker} A^{\,\cdot} = 0$

$\dim \operatorname{Ker} A^{i+1} = \dim \operatorname{Ker} A^{i} + \#(\text{blocs de taille} > i)$

Th (Réduction de Jordan)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in M_n(\mathbb{C})$ tq $A = PJP^{-1}$

avec $J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$ où $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

II) Dualité et formes quadratiques [GRIFFONE - OXENS 1]

1°/ Classification des formes quadratiques

Th Soit (E,q) un espace vectoriel de dim finie, $E \neq \{0\}$ muni d'une forme quadratique q. Il existe sur E des bases q-orthogonales ie il existe une base $\{e_i\}_{i=1..n}$ tq

$q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$, $x = \sum x_i e_i$

avec $a_i \in \mathbb{K}$, $r = rg(q)$

ex $\tilde{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$

s'écrit $\tilde{q}(x) = (x_1+x_2)^2 + 2(x_2+2x_3)^2 - x_3^2$

par méthode de Gauss.

Th Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dim n et q une forme quadratique sur E

Il existe une base $\{e_i\}$ tq

$M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow r = rg\, q$

Th (Loi d'inertie) de Sylvester : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim n, q une forme quadratique sur E. Il existe une base $\{e_i\}$ de E tq

$M(q)_{e_i} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow p \\ \\ \leftarrow p+s \end{array}$

où $r = p+s = rg(q)$.

le couple (p,s) est dit signature de q. **ex** $sgn\, \tilde{q} = (2,1)$

2°/ Orthogonalité

Soit q forme quadratique sur E $\mathbb{K}$-ev de dim finie et s sa forme polaire.

Déf Soit $A \subset E$ on note $A^\perp = \{x \in E \,/\, s(x,a) = 0 \ \forall a \in A\}$

Prop i) $A^\perp$ est un sev de E

ii) $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = N(q)$

iii) $\forall A \subset E$, $N(q) \subset A^\perp$

Prop Soit F sev de E. Alors

i) $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N(q))$

ii) $F^{\perp\perp} = F + N(q)$

en particulier si q est non dégénérée $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$

Application **DEV**

Prop Soit V sev de $M_n(\mathbb{R})$ tq $\forall M \in V$ on ait $rg\, M \leq p$. Alors $\dim V \leq pn$

application : tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ rencontre $Gl_n(\mathbb{R})$.

III) Dimension et géométrie - [PERRIN-TAUVEL]

1/ Quelques notions sur la théorie des corps

Déf Soient K, L des corps avec $K \subset L$. On dit que L est une extension de K.

ex : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Rq L est un K-ev, si $\dim_K L$ est finie on pose $[L:K] = \dim_K L$ et $[L:K]$ s'appelle le degré de L sur K

Th Soient $K \subset L \subset M$ des corps, si les degrés sont finis on a $[M:K] = [M:L][L:K]$

Déf Soit $K \subset L$ une extension et $\alpha \in L$. Soit $\varphi : K[T] \to L$ tq $\varphi_{|K} = id$ et $\varphi(T) = \alpha$

i) si φ est injectif α est transcendant sur K

ii) sinon α est algébrique sur K.

ex : $i \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$.

Th Soit $K \subset L$ une extension et $\alpha \in L$. On a

EQU : i) α est algébrique sur K

ii) $\dim_K K[\alpha] < \infty$

iii) $K[\alpha] = K(\alpha)$ (plus petit ss corps de L contenant α)

2/ Constructions à la règle et au compas.

On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de deux pts $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$. Pour A une partie de $\mathbb{R}^2$ on considère

i) les droites affines $\langle P, Q \rangle$, $P, Q \in A$ distincts

ii) les cercles centrés en $P \in A$ passant par $Q \in A$ distincts

Déf • Soit A partie de $\mathbb{R}^2$ et $M \in \mathbb{R}^2$. On dit que M est constructible en un pas à partir de A s'il existe 2 élts distincts, droites ou cercles, de type i) ou ii) dont M soit un point d'intersect°

• un pt M est dit constructible s'il existe une suite $A_0 \subset \dots \subset A_n$ de parties de $\mathbb{R}^2$ avec

a) $A_0 = \{O, I\}$ b) $M \in A_n$ c) $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$ où M_i est constructible en un pas à partir de A_{i-1}

• Un nbre réel x est dit constructible ssi $(x,0)$ l'est

Prop les pts suivants sont constructibles.

1) $(n,0)$ $n \in \mathbb{N}$ 2) $(0,n)$ $n \in \mathbb{N}$ 3) $(x,0)$ $x \in \mathbb{Q}$

4) si $x > 0$ est constructible, $\sqrt{x}$ aussi

Th Soit x réel constructible. Alors x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré $[\mathbb{Q}[x]:\mathbb{Q}]$ est une puissance de 2

ex : - $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible d'où l'impossibilité de la duplicat° du cube

- π n'est pas constructible d'où l'impossibilité de la quadrature du cercle.

3/ Théorème de Hahn-Banach géométrique

On considère $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine euclidien de dimension $n > 0$.

Th Soit $\mathcal{A}$ un ouvert convexe non vide de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ tq $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ **DEV**

applicat° : résultat de séparation.

Déf Un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ sépare (resp strictement) deux parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$, si $\mathcal{A}$ est dans l'un et $\mathcal{B}$ dans l'autre des demi-espaces fermés (resp. demi-espaces ouverts) déterminés par $\mathcal{H}$

Prop Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des sous-ensembles convexes non vide de $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Si $\mathcal{A}$ est ouvert, il existe un hyperplan séparant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

références :

Goblot, Algèbre linéaire
Gourdon, Algèbre
Griffone, Algèbre linéaire
Perrin, Cours d'Algèbre
OXENS Alg 1
Tauvel, Maths pour l'agreg